Álgebras de Lie

Ficha 3

Nestas questões, Φ é um sistema de raízes (abstracto) num espaço euclideano real E, com grupo de Weyl W.

1. Seja $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ onde α é uma raíz de Φ. Prove que o conjunto $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$ é um sistema de raízes em E, cujo grupo de Weyl é naturalmente isomorfo a W e que verifica $< \alpha^\vee, \beta^\vee > = < \alpha, \beta >$. Desenhe $\Phi^\vee$ nos casos em que Φ é um dos sistemas da figura da página 44.

2. Prove que, dadas duas raízes não proporcionais $\alpha, \beta \in \Phi$, a ordem do elemento $\sigma_\alpha \sigma_\beta \in W$ só pode ser 2, 3, 4 ou 6.

3. Mostre que o grupo de Weyl de um sistema de raízes de rank 2 é um grupo diedral (o grupo de simetria de um polígono regular de n lados).

4. Sejam α e β elementos de Φ que geram um subespaço E' (de dimensão 2) de E. Prove que tanto $\Phi \cap E'$ como $\Phi \cap (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta)$ são sistemas de raízes em E', mas que, em geral, não coincidem.

5. Se Δ é uma base de Φ e $\alpha_1, ..., \alpha_m$ elementos distintos de Δ, mostre que o conjunto $\Phi \cap (\mathbb{Z}\alpha_1 + ... + \mathbb{Z}\alpha_m)$ é um sistema de raízes de dimensão m no espaço gerado por $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

6. Mostre que os únicos sistemas de raízes de rank 2 são os descritos no texto na pág. 44.

7. Mostre que a função sinal $sn : W \to \{\pm 1\}$ é um homomorfismo de grupos. Por definição, $sn(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$ onde $l(\sigma)$ é o comprimento de $\sigma \in W$ (o número mínimo de factores no produto $\sigma = \prod_i \sigma_{\alpha_i}$, onde todos as raízes α_i são *simples*).

8. Dado $\alpha \in E$ seja $\Phi^+(\alpha) := \{\gamma \in E : (\gamma, \alpha) > 0\}$ o semi-espaço positivo relativo a α. Prove que a intersecção dos semi-espaços positivos relativos ao elementos de uma base $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de Φ é não vazia, isto é, que
$$C(\Delta) \equiv \Phi^+(\alpha_1) \cap \cdots \cap \Phi^+(\alpha_n) \neq \emptyset.$$

9. Mostre que se λ pertence ao conjunto $C(\Delta)$ definido acima, e $\sigma\lambda = \lambda$ para algum $\sigma \in W$, então $\sigma = 1$.

10. Calcule o determinante das matrizes de Cartan dos sistemas de raízes do tipo A_n.

11. Mostre que o grupo de Weyl de um sistema de raizes é isomorfo ao produto directo dos grupos de Weyl das suas componentes irredutíveis.

12. Mostre que a inclusão de um diagrama de Dynkin noutro induz uma inclusão de sistemas de raízes.

Referências

[H] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag GTM 9, 1972.