Grupos de Lie

Ficha 4

1. Mostre que o conjunto das matrizes ortogonais $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes unitárias $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ são grupos de Lie.

2. Mostre que $U(n) \subset SO(2n)$ e que $GL(n, \mathbb{C}) \subset GL^{+}(2n, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{C}^n$ é visto como um espaço vectorial real ($GL^{+}(2n, \mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes reais de determinante positivo). Prove que $GL(n, \mathbb{C}) \cap SO(2n) = U(n)$.

3. Seja $D \subset GL(n, \mathbb{R})$ o grupo de matrizes triangulares superiores com números positivos na diagonal. Mostre que a multiplicação de matrizes $D \times O(n) \to GL(n, \mathbb{R})$ é um difeomorfismo e deduza que $GL(n, \mathbb{R})$ é uma variedade difeomorfa a $O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ (Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt).

4. Seja $\mathbb{CP}^1$ o espaço projectivo complexo de dimensão um (o espaço das rectas complexas que passam pela origem em $\mathbb{C}^2$). Mostre que as transformações de Möbius dadas por

$$T([z : w]) = [az + bw \ : \ cz + dw]; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C})$$

   estão bem definidas como aplicações $T : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ (onde $(z, w) \neq (0, 0)$), e que o grupo de todas as transformações de Möbius (com a composição) é isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/(\pm I)$, onde I é a matriz identidade.

5. Mostre que um homomorfismo bijectivo de grupos de Lie é um isomorfismo.

6. Mostre que a álgebra de Lie de $PGL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ (onde $\mathbb{C}^*$ designa o subgrupo das matrizes escalares não nulas) é isomorfa a $\mathsf{sl}(n, \mathbb{C})$

7. Mostre que a aplicação exponencial do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ não é sobrejectiva. Calcule a imagem desta aplicação e determine quais os valores possíveis de $tr(exp(A))$ para matrizes $A \in \mathsf{sl}(2, \mathbb{R})$.

8. Mostre que a representação adjunta define um homomorfismo sobrejectivo $SU(2) \to SO(3)$ com núcleo $\{\pm I\}$.

9. Prove que qualquer grupo de Lie complexo (variedade com estrutura complexa) compacto e conexo é abeliano (Sugestão: mostre que a representação adjunta é trivial usando o facto de que funções holomorfas numa variedade complexa compacta são constantes).

10. Prove que $\mathbb{R}^2$ com a multiplicação

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + e^{b_1} a_2, b_1 + b_2)$$

é um grupo de Lie e mostre que há um integral invariante à esquerda que não é invariante à direita e não é invariante por conjugação.

11. Sejam α, β os subgrupos a um parâmetro de $SO(3)$ dados por

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Mostre que a aplicação $\gamma : (S^1)^3 \to SO(3)$ definida por $\gamma(\varphi, \vartheta, \psi) = \alpha(\varphi)\beta(\vartheta)\alpha(\psi)$ é sobrejectiva, sendo $\varphi, \vartheta, \psi \in [0, 2\pi]$. Prove que

$$\gamma * dg = \pm \frac{\sin \vartheta}{8\pi^2} \, d\varphi \wedge d\vartheta \wedge d\psi$$

e conclua que o integral invariante em $SO(3)$ é dado por

$$f \mapsto \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \gamma) \ \sin \vartheta \ \ d\varphi d\vartheta d\psi,$$

para funções $f : SO(3) \to \mathbb{R}$.

12. Seja $f : G \to H$ um homomorfismo sobrejectivo de grupos de Lie compactos da mesma dimensão. Mostre que qualquer outra aplicação homotópica a f é ainda sobrejectiva.

Referências

[BD] Bröcker, tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag GTM 98, 1985.