Grupos de Lie

Ficha 5

1. Mostre que a representação em $V = \mathbb{C}^2$ do grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$ dada por
$$t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
não possui produto interno invariante, e que não é soma directa de submódulos irredutíveis. Determine as subrepresentações irredutíveis.

2. Determine os subespaços irredutíveis da representação $S^1 \to O(2) \subset U(2) \subset GL(2, \mathbb{C})$ dada por
$$e^{it} \mapsto \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = R(t).$$
Encontre uma matriz unitária A tal que $e^{it} \mapsto AR(t)A^{-1}$ é soma directa de duas representações unidimensionais.

3. Se H é um subgrupo abeliano de $U(n)$, prove que H é conjugado a um subgrupo do grupo das matrizes diagonais em $U(n)$.

4. Sejam V e W duas representações unitárias equivalentes de um grupo compacto e $\phi : V \to W$ um isomorfismo entre elas. Mostre que $\langle \phi(v_1), \phi(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

5. Use um produto interno invariante para mostrar que, para qualquer representação V de um grupo compacto G, se tem um isomorfismo $\overline{V} \cong V^*$.

6. Seja V uma representação irredutível de um grupo compacto G, com carácter $\chi = \chi_V$. Prove que
$$\chi(x)\chi(y) = (\dim V) \int_G \chi(gxg^{-1}y)\, dg$$

7. Mostre que o espaço de classes de conjugação de $G = SU(2)$ (o espaço das órbitas da acção $G \times G \to G$ dada por $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$) é homeomorfo a um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

8. Seja $V_n \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ o espaço vectorial dos polinómios homogéneos de grau n em duas variáveis e $P_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$ uma base de V_n. Prove que o seguinte o produto interno Hermitiano em V_n

$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! a_k \bar{b}_k,$$

onde $a(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ e $b(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k$, é $SU(2)-$invariante.

Referências

[BD] Bröcker, tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag GTM 98, 1985.