Introdução

Os espaços moduli de fibrados vectoriais estáveis ou semiestáveis sobre uma curva algébrica C de género g foram construídos há mais de 30 anos por Mumford, usando a teoria, por ele desenvolvida, dos invariantes geométricos [Mu]. A geometria e a topologia destes espaços é muito rica, como comprova o grande número de artigos dedicados a este assunto,[AB], [NS], [Ne1], e outros. Com excepção do caso clássico dos fibrados linha, fibrados vectoriais de dimensão 1, pouco é conhecido acerca da sua geometria, como por exemplo, a existência e estrutura das suas subvariedades.

A teoria de Brill-Noether baseia-se no estudo das subvariedades dos espaços moduli constituídas por fibrados vectoriais estáveis ou semiestáveis que têm pelo menos um certo número de secções linearmente independentes. A estas subvariedades dá-se o nome de espaços de Brill-Noether e denotam-se por $W^{k-1}_{n,d}(C)$, onde n é a dimensão dos fibrados vectoriais, d o seu grau e k o número de secções.

No caso $n = 1$, estes espaços são bem conhecidos desde o século XIX. De facto, sabe-se que o número $\rho = g - k(k - d + g - 1)$, chamado número de Brill-Noether, caracteriza a existência e a conexidade da variedade de Brill-Noether $W^{k-1}_{1,d}(C)$. Por exemplo, se $\rho \geq 0$ $W^{k-1}_{1,d}(C)$ é não vazio e se $\rho > 0$ $W^{k-1}_{1,d}(C)$ é conexo. A variedade de Brill-Noether pode ser redutível, mas cada componente tem dimensão maior ou igual a ρ [ACGH].

No caso dos fibrados vectoriais com dimensão superior a 1, o primeiro problema a abordar na teoria de Brill-Noether consiste em saber, para dados valores de g, n, d e k, se o conjunto $W^{k-1}_{n,d}(C)$ é não vazio. Muitos trabalhos recentes têm sido dedicados a esta questão que ainda não foi completamente resolvida em geral [Me1], [BGN]. Além deste problema existem muitas outras questões em aberto, tais como: qual a dimensão de $W^{k-1}_{n,d}(C)$, o estudo da sua irredutibilidade, o estudo das singularidades, o número das componentes conexas, a topologia dos espaços de Brill-Noether, etc. Pode-se ver a extensa lista em [Ne2], [Me2].

Este trabalho está dividido em duas partes, na primeira vamos estudar o caso em que a curva é elíptica, isto é, a curva tem género 1, e na segunda o caso de género maior ou igual a 2. Fez-se esta divisão devido às diferenças que os fibrados vectoriais sobre uma curva elíptica apresentam em relação aos fibrados vectoriais sobre uma curva de género maior.

O ponto de partida para a primeira parte é o artigo de Atiyah [A], que classifica completamente os fibrados vectoriais indecomponíveis sobre uma curva elíptica. Aqui vamos provar que todo o fibrado vectorial sobre uma curva elíptica é semiestável e é estável se e só se a sua dimensão e grau são primos entre si [Tu]. Este resultado é importante na caracterização do espaço moduli de fibrados vectoriais semiestáveis sobre uma curva elíptica.

O espaço moduli $\tilde{M}_{n,d}(C)$ de classes de S-equivalência de fibrados vectoriais semiestáveis de dimensão n e grau d sobre uma curva elíptica C pode ser identificado com o produto simétrico da curva, com dimensão igual a h, o máximo divisor comum entre n e d, denotado por S^hC [Tu]. Com esta identificação a aplicação determinante $\det : \tilde{M}_{n,d}(C) \to J_d$ (variedade jacobiana dos fibrados linha de grau d) corresponde à aplicação de Abel-Jacobi $\alpha : S^hC \to J_h$, que a cada ponto de S^hC faz corresponder o fibrado linha a ele associado, tal que o espaço moduli com determinante fixo é identificado com um espaço projectivo.

Os espaços de Brill-Noether para fibrados vectoriais semiestáveis sobre a curva elíptica que não são triviais vão ser aqueles em que o grau d é igual a zero. Como neste caso não existem fibrados vectoriais estáveis e a dimensão do espaço das secções holomorfas de um fibrado não está bem definida no espaço moduli para dimensão $n > 1$, definem-se e caracterizam-se dois novos espaços de Brill-Noether, $W^{k-1}_{n,0}(\forall)$ e $W^{k-1}_{n,0}(\exists)$. O primeiro é o conjunto das classes de fibrados em que todos os seus representantes têm pelo menos k secções linearmente independentes, e o segundo é o conjunto des classes de fibrados em que existe pelo menos um representante com k ou mais secções linearmente independentes. Analogamente definem-se e identificam-se espaços de Brill-Noether no espaço moduli com determinante fixo.

A segunda parte aborda o caso em que temos uma curva algébrica projectiva suave C com género maior ou igual a 2. Constróem-se os espaços de Brill-Noether para fibrados vectoriais estáveis com dimensão n e grau d coprimos, a que se dá uma estrutura de variedades determinantais [ACGH, cap.2]. Não se faz o caso geral para qualquer dimensão e grau, pois teriamos que usar geometria invariante, que não é abordada nesta tese. Assume-se, portanto, que construímos os espaços de Brill-Noether para toda a dimensão e grau e caracterizamos os seus espaços tangentes de Zariski em analogia com o caso clássico dos fibrados linha estudado em [ACGH].

Seguidamente, define-se a chamada região de Brill-Noether, região esta onde o problema de Brill-Noether: "Que condições temos que impor a n, d, k e g para que os espaços de Brill-Noether sejam não vazios?"- é não trivial.

Por último, vamos examinar o caso $n \geq 2$ e $d \leq n$ que nos fornece um exemplo não trivial em que $W^{k-1}_{n,d}$ é vazio [BGN]. Esta conclusão pode-se estender para $d < 2n$ [Me1], [Me3].

NOTAÇÕES

C =curva algébrica projectiva de género g sobre um corpo algebricamente fechado de característica nula.

$H^0(E)$ =espaço das secções holomorfas de um fibrado vectorial holomorfo E sobre C.

$\Im_{n,d} = \Im_{n,d}(C)$ =conjunto dos fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis de dimensão n e grau d sobre uma curva elíptica C, isto é, uma curva de género 1.

$\bar{\Im}_{n,d} = \bar{\Im}_{n,d}(C)$ ={classes de isomorfismo de fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis de dimensão n e grau d sobre uma curva elíptica C}

$h^i(E) = dim H^i(C, E)$

I_k =fibrado vectorial holomorfo trivial de rank k.

$I = \mathcal{O}$ =fibrado linha trivial.

K =fibrado canónico sobre C.

$J_d(C) = J_d$ =variedade das classes de isomorfismo de fibrados linha de grau d sobre C.

T_n =subgrupo de J_0 composto pelos elementos de n-torsão, i.e., pelos fibrados linha L tal que $L^n \cong I$.

$\tilde{M}_{n,d} = \tilde{M}_{n,d}(C)$ =espaço moduli das classes de S-equivalência de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis de dimensão n e grau d sobre C.

$M_{n,d} = M_{n,d}(C)$ =espaço moduli das classes de isomorfismo de fibrados vectoriais holomorfos estáveis de dimensão n e grau d sobre C.

$\tilde{M}_{n,L} = \{e \in \tilde{M}_{n,d} | \quad \forall E \in e, \det E \cong \det L\}$($L$ fibrado linha com grau d).

$S^h C$ =produto simétrico de ordem h da curva C.

$\sum E_i = \oplus E_i$

$\prod E_i = \otimes E_i$

$(n, d) = m.d.c.(n, d)$

Se $g = 1$:

$\tilde{W}^{k-1}_{n,d}(C) = \{E \in \tilde{M}_{n,d}(C) | \quad h^0(E) \geq k\}$ $(d > 0)$

$W^{k-1}_{n,0}(\forall) = \{e \in \tilde{M}_{n,0} | \quad \forall E \in e, h^0(E) \geq k\}$

$W^{k-1}_{n,0}(\exists) = \{e \in \tilde{M}_{n,0} | \quad \exists E \in e : h^0(E) \geq k\}$

$W^{k-1}_{n,L}(\forall) = \{e \in \tilde{M}_{n,L} | \quad \forall E \in e, h^0(E) \geq k\}$.($L$ fibrado linha com grau 0)

$W^{k-1}_{n,L}(\exists) = \{e \in \tilde{M}_{n,L} | \quad \exists E \in e : h^0(E) \geq k\}$.($L$ fibrado linha com grau 0)

Se $g \geq 2$:

$W^{k-1}_{n,d}(C) = \{E \in M_{n,d}(C) | \quad h^0(E) \geq k\}$

$G(k, V)$ = grassmaniana dos subespaços de dimensão k de V (espaço vectorial).

$G^{k-1}_{n,d}(C) = \{(E, V) | \quad E \in M_{n,d}(C), V \in G(k, H^0(E))\}$

$\rho(g, n, d, k-1) = n^2(g-1) + 1 - k(k - d + n(g-1))$=número de Brill-Noether, onde g =género, n =dimensão, d =grau e $k-1$ =número de secções.

Preliminares

Primeiras definições

Vamos começar por definir algumas propriedades relativas a fibrados vectoriais holomorfos sobre uma curva algébrica projectiva C, que vão ser usadas ao longo deste trabalho.

Definição 1 *Seja E um fibrado vectorial holomorfo sobre C. Define-se o declive de E como sendo $\mu_E = \frac{\deg E}{rkE}$, em que $\deg E$ significa grau de E e rkE a dimensão de E.*

Definição 2 *Seja E um fibrado vectorial holomorfo sobre C. Diz-se que E é semiestável (resp. estável) se para qualquer subfibrado próprio $F \subset E$ tem-se $\mu_F \leq \mu_E$ (resp. $\mu_F < \mu_E$).*

Definição 3 *Um fibrado vectorial holomorfo E sobre C diz-se indecomponível se não é soma directa de dois subfibrados próprios.*

Definição 4 *Diz-se que um fibrado vectorial holomorfo E sobre uma curva é não especial se $h^1(E) = 0$, caso contrário diz-se especial.*

O declive de um fibrado vectorial holomorfo vai ter as seguintes propriedades que vão ser consequência das definições anteriores.

Proposição 1 *1)*

I. $\mu_{E\oplus F} \leq \max(\mu_E, \mu_F)$

II. $\mu_{E\otimes F} = \mu_E + \mu_F$

2) Um fibrado vectorial holomorfo E sobre uma curva C é semiestável sse para qualquer subfibrado indecomponível $F \subset E$, $\mu_F \leq \mu_E$.

3) Um fibrado vectorial holomorfo estável é indecomponível.

4) Numa sucessão exacta $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ se E' e E'' são semiestáveis com o mesmo declive μ, então E é semiestável com declive μ.

Todo o fibrado vectorial holomorfo F admite uma filtração constituída por subfibrados vectoriais de F

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_k = F$$

onde os quocientes $\frac{F_i}{F_{i-1}}$ são semiestáveis e $\mu(\frac{F_i}{F_{i-1}}) > \mu(\frac{F_{i+1}}{F_i})$ para $i = 1, ..., k-1$. A esta filtração dá-se o nome de filtração de Harder-Narasimhan. Ver [LP].

Por sua vez, todo o fibrado vectorial holomorfo semiestável E com declive μ tem uma filtração, chamada a filtração de Jordan-Hölder:

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset ... \subset E_n = E$$

onde os quocientes $\frac{E_i}{E_{i-1}}$ são estáveis de declive μ. Estes estão unicamente determinados a menos de permutação. Pode-se então definir o fibrado graduado associado $Gr(E) = \oplus \frac{E_i}{E_{i-1}}$.

Define-se então a seguinte relação de equivalência para fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis.

Definição 5 *Dois fibrados semiestáveis E e E' dizem-se S-equivalentes e escreve-se $E \sim E'$ se $Gr(E) \cong Gr(E')$.*

Observação 1 *Se E é estável então $Gr(E) \cong E$, logo E e E', fibrados estáveis, são S-equivalentes sse $E \cong E'$.*

Relembramos alguns resultados clássicos que vão ser usados neste trabalho:

Teorema 1 (Riemann-Roch) *Seja F um feixe coerente com dimensão n e grau d, sobre uma curva de género g. Então*

$$h^0(F) - h^1(F) = d - n(g-1).$$

Teorema 2 (Dualidade de Serre) *Seja F um feixe coerente sobre uma curva C, então $H^0(F) \cong H^1(K \otimes F^*)^*$, onde K é o feixe canónico de C.*

Teorema 3 (Clifford) *Seja L um fibrado linha com grau d sobre uma curva C tal que $0 \leq d \leq 2g-1$, então $h^0(E) \leq \frac{d}{2} + 1$.*

Parte I

Nesta primeira parte vamos caracterizar o espaço moduli de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis sobre uma curva elíptica, isto é, uma curva de género 1 e definir os seus espaços de Brill-Noether e identificá-los. Nesta primeira secção, vamos, porém, dar algumas definições e resultados que são válidos para uma curva de género qualquer.

I.1-Filtrações de um fibrado vectorial com muitas secções

Sejam E, F e G fibrados vectoriais holomorfos sobre uma curva C, uma extensão de F por G é uma sucessão exacta de fibrados vectoriais $0 \to G \to E \xrightarrow{p} F \to 0$ e neste caso diz-se que E é uma extensão de F por G. Uma extensão diz-se trivial se existir um morfismo $q : F \to E$ tal que pq é o morfismo identidade de F.

Pode-se construir uma sucessão exacta longa de cohomologia associada à extensão E dada por

$$0 \to H^0(G) \to H^0(E) \to H^0(F) \xrightarrow{\partial} H^1(G) \to H^1(E) \to H^1(F) \to ...$$

Duas extensões E e E', de F por G, são isomorfas se existir um isomorfismo $f : E \to E'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G & \to & E & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow^{id} & & \downarrow^{f} & & \downarrow^{id} & & \\ 0 & \to & G & \to & E' & \to & F & \to & 0 \end{array}$$

é comutativo.

Define-se, então, classe de isomorfismos de uma extensão E como sendo o conjunto das extensões que lhe são isomorfas.

Existe uma correspondência 1-1 entre o conjunto das classes de isomorfismos de extensões de F por G e o espaço vectorial $H^1(Hom(F,G)) \cong Hom(H^0(F), H^1(G))$ (ver [A1]). A extensão trivial vai corresponder ao zero de $H^1(Hom(F,G))$, por isso se existir uma extensão não trivial de F por G tem-se $H^1(Hom(F,G)) \neq 0$.

Uma definição que nos vai ser útil.

Definição 6 *Uma extensão $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ é E''-completa se o homomorfismo de cobordo $\partial : H^0(C, E'') \longrightarrow H^1(C, E')$ é um monomorfismo.*

Dualmente, $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ é E'-completa se $0 \longrightarrow E''^* \longrightarrow E^* \longrightarrow E'^* \longrightarrow 0$ é E'^*-completa, isto é, se $\partial : H^0(C, E'^*) \longrightarrow H^1(C, E''^*)$ é um monomorfismo.

Lema 1 *Se E é indecomponível então $(E) : 0 \longrightarrow I_k \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$ é I_k-completa.*

Dem. *Considere-se a extensão dual de (E) dada por $0 \longrightarrow E'^* \longrightarrow E^* \xrightarrow{p} I_k^* \longrightarrow 0$. Supondo que $\partial : H^0(I_k^*) \to H^1(E'^*)$ não é um monomorfismo, assim $p^* : H^0(E^*) \to H^0(I_k^*)$ é diferente de zero, então para algum $u \in H^0(E^*)$, $p^*(u) = t \neq 0$.*

Temos $div(t) \geq div(u) \geq 0$ mas $div(t) = 0$ porque $t \in H^0(I_k^*)$. Logo $div(u) = 0$. Então u gera um subfibrado linha trivial $[u]$ de E^* que se aplica isomorficamente no subfibrado linha trivial $[t]$ de I_k^* através de p. Obtém-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{p} & I_k^* \\ \uparrow & & \downarrow_q \\ [u] & \cong & [t] \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

onde q é qualquer projecção de I_k^* para o factor directo $[t]$. Assim E^* é decomponível e logo E também o vai ser. ■

Lema 2 *Se $h^1(E') = k$ (resp. $h^1(E'^*) = k$), existe um único fibrado vectorial E, a menos de isomorfismo, tal que a extensão (E) $0 \to E' \to E \to I_k \to 0$ é I_k-completa (resp. $0 \to I_k \to E \to E' \to 0$).*

Dem. *Se $h^1(E') = k$, então* existe um isomorfismo $\partial : H^0(I_k) \to H^1(E')$. *Logo existem E fibrado vectorial e a extensão (E) $0 \to E' \to E \to I_k \to 0$ dados pela correspondência 1-1 entre $Hom(H^0(I_k), H^1(E'))$ e as extensões de I_k por E'. (E) vai ser I_k-completa porque ∂ é um monomorfismo. A unicidade vem de que quaisquer dois tais isomorfismos diferem por um automorfismo de $H^0(I_k)$, e então os fibrados vectoriais das extensões correspondentes são isomorfos.* ■

Define-se a seguinte relação entre fibrados linha holomorfos sobre uma curva C.

Definição 7 *Sejam L_1, L_2 dois fibrados linha sobre C, define-se $L_1 \geq L_2$ sse $H^0(Hom(L_1, L_2)) \neq 0$.*

Da definição deduzem-se as seguintes propriedades:

Proposição 2 *I) $L_1 \geq L_2$ sse $L_1 \otimes L_2^* \geq I$.*
II) $L_1 \geq L_2$ então $degL_1 \geq \deg L_2$.

Seja E um fibrado vectorial holomorfo sobre C de dimensão n, com $n > 1$, seja $s \in H^0(E)(s \neq 0)$, então s define canonicamente uma secção racional $\tilde{s}$ do fibrado projectivo associado a E, $\mathbb{P}E$. Esta secção vai ser holomorfa porque $\tilde{s} : C \to \mathbb{P}E$ é uma aplicação racional e $\mathbb{P}E$ é uma variedade completa (ver [Sh]).

Como $\tilde{s}$ é holomorfa, $\tilde{s}$ define um subfibrado holomorfo de E com dimensão 1, que vamos designar por $[s]$ e chama-se o fibrado linha gerado por $\tilde{s}$. A fibra de $[s]$ num ponto $x \in C$ pode ser descrita da seguinte forma:

Seja $x \in C$ e t um parâmetro centrado em x, pode-se escrever $s(t) = t^r s'(t)$ com $s \geq 0$ e $s'(x) \neq 0$. Então $[s]_x$ é definido como sendo o espaço vectorial de dimensão 1 gerado por $s'(x)$. Vê-se facilmente que s é uma secção de $[s]$.

Define-se o divisor de s por:

$$div(s) = \sum_x r_x x$$

e faz-se $deg(s) = deg(div(s)) = \sum r_x$. Então $deg(s) = deg[s]$.

Definição 8 *Diz-se que E tem secções suficientes se a aplicação $H^0(E) \longrightarrow E_x$ que a cada secção $s \in H^0(E)$ associa o seu valor $s(x) \in E_x$ é um epimorfismo para $\forall x \in C$.*

Proposição 3 *Seja $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ uma sucessão exacta de fibrados vectoriais sobre C. Então se E tem secções suficientes, E'' também tem.*

Dem. *Tem-se o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccc} H^0(E) & \rightarrow & H^0(E'') & & \\ (1)\downarrow & & \downarrow & & \\ E_x & \rightarrow & E''_x & \rightarrow & 0 \end{array}$$

onde (1) por hipótese é um epimorfismo, logo $H^0(E'') \longrightarrow E''_x$ também o vai ser. ∎

Se E tem secções suficientes, $\frac{E}{[s]}$ também vai ter pela proposição anterior. Iterando este facto, tem-se

$$E^0 = E \xrightarrow{p_1} E^1 = \frac{E}{[s]} \xrightarrow{p_2} E^2 = \frac{E^1}{[s_1]} \xrightarrow{p_3} ...$$

onde p_i são as projecções canónicas e s_i são secções de E^i.

Constrói-se assim uma série de subfibrados de E

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n = E$$

onde $E_1 = [s]$, $E_2 = p_1^{-1}([s_1])$,..., $E_{n-1} = p_1^{-1}...p_{n-2}^{-1}([s_{n-2}])$, $E_n = p_1^{-1}...p_{n-1}^{-1}([s_{n-1}]) = E$ e $L_i = \frac{E_i}{E_{i-1}}$ é um fibrado linha.

A tal série dá-se o nome de decomposição de E e escreve-se $E = (L_1, L_2, ..., L_n)$.

Definição 9 *$(L_1, ...L_n)$ é uma decomposição maximal de E se*

(I) L_1 é um fibrado linha maximal de E, i.e., L_1 tem grau máximo.

(II) $(L_2, ..., L_n)$ é uma decomposição maximal de $\frac{E}{L_1}$.

Vamos ver que o grau máximo é finito.

Lema 3 *Os inteiros $deg(s)$, $s \in H^0(E)$ $(s \neq 0)$ são limitados superiormente.*

Dem. *Seja $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n = E$ uma decomposição fixa de E e $L_i = \frac{E_i}{E_{i-1}}$. Seja $s \in H^0(E)$ $(s \neq 0)$, então existe $i \geq 1$ tal que $[s] \subset E_i$ mas $[s] \nsubseteq E_{i-1}$. Segue que existe um homomorfismo não nulo $[s] \longrightarrow L_i$ e então $[s] \leq L_i$ o que implica que $deg[s] \leq deg L_i$. Logo qualquer que seja $s \in H^0(E)$, $deg(s) \leq \max \deg(L_i)$.* ∎

Algumas propriedades e existência da decomposição maximal:

Lema 4 *Seja $(L_1, ...L_n)$ uma decomposição maximal de E. Então $\deg L_i - \deg L_{i-1} \leq 2g$, $i = 2, ..., n$.*

Dem. *Prova-se por indução em* n.

Para $n = 2$, *temos a sucessão exacta associada à decomposição de* E

$$0 \to L_1 \to E \to L_2 \to 0$$

tensorizando com L_1^* *obtém-se*

$$0 \to I \to E \otimes L_1^* \to L_2 \otimes L_1^* \to 0.$$

Se $\deg(L_2 \otimes L_1^*) \geq 2g + 1$, *pelo teorema de Riemann-Roch*

$$h^0(L_2 \otimes L_1^*) \geq 2g + 1 - g + 1 = g + 2.$$

A sucessão de cohomologia associada é dada por

$$0 \to H^0(I) \to H^0(E \otimes L_1^*) \to H^0(L_2 \otimes L_1^*) \to H^1(I) \to H^1(E \otimes L_1^*) \underset{*}{\to} 0$$

A aplicação em $*$ *é zero porque* $\deg(L_1 \otimes L_2^* \otimes K) \leq -3$ *e então* $H^1(L_2 \otimes L_1^*) = 0$.

Sabemos que $\dim H^1(I) = g$, *então* $h^0(E \otimes L_1^*) \geq 1 + g + 2 - g = 3$.

Isto implica que para todo o $x \in C$, $\ker(H^0(E \otimes L_1^*) \to (E \otimes L_1^*)_x)$ *tem dimensão igual a pelo menos um. Então existe secção* $\Phi \in H^0(E \otimes L_1^*)$ *com* $div\Phi \geq (x)$ *e assim* $\deg \Phi \geq 1$. $[\Phi]$ *é um subfibrado linha de* $E \otimes L_1^*$ *e logo* $[\Phi] \otimes L_1$ *é um subfibrado linha de* $E \otimes L_1 \otimes L_1^* \cong E$. *Mas* $\deg([\Phi] \otimes L_1) \geq 1 + \deg L_1$, *o que é absurdo pois* L_1 *tem grau máximo. Logo* $\deg(L_2 \otimes L_1^*) = \deg L_2 - \deg L_1 \leq 2g$.

Supondo que o lema é válido para todo $n' < n$, *como* $(L_2, ..., L_n)$ *é uma decomposição maximal de* $\frac{E}{L_1}$, *segue pela hipótese de indução que*

$$\deg L_i - \deg L_{i-1} \leq 2g \text{ para } i = 3, ..., n.$$

Falta provar para $i = 2$. *Seja* E_2 *o subfibrado de* E *com dimensão 2 dado pela decomposição de* E. *Como* L_1 *é um fibrado linha maximal de* E, *vai ser também de* E_2. *Então* (L_1, L_2) *é uma decomposição maximal de* E_2, *e pelo caso* $n = 2$

$$\deg L_2 - \deg L_1 \leq 2g.$$

■

Lema 5 *Seja* E *um fibrado vectorial indecomponível e* $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ *uma sucessão exacta. Então* $H^0(Hom(E_1, E_2 \otimes K)) \neq 0$, *onde* K *é o fibrado canónico.*

Dem. *As classes de extensões de* E_2 *por* E_1 *são descritas por elementos de* $H^1(C, Hom(E_2, E_1))$ *e como* E *é uma extensão não trival temos* $H^1(C, Hom(E_2, E_1)) \neq 0$. *Pela dualidade de Serre este é dual ao espaço vectorial* $H^0(Hom(E_1, E_2 \otimes K))$, *logo* $H^0(Hom(E_1, E_2 \otimes K)) \neq 0$. ■

Lema 6 *Se* C *for uma curva de género* g *e se* E *for um fibrado vectorial indecomponível com secções suficientes então* E *tem uma decomposição maximal* $(L_1, ..., L_n)$ *com* $degL_i \geq \deg L_1 - (i-1)(2g-2)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Dem. *Como* $H^0(E) \neq 0$, *E tem um fibrado linha maximal* $E_1 \geq I$. *Vamos provar por indução em* n.

Supondo que se construiu uma sucessão $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_i$, *onde* $L_j = \frac{E_j}{E_{j-1}}$ *é um fibrado linha de* $\frac{E}{E_{j-1}}$, $j = 1, ..., i$ *e tal que* $degL_i \geq \deg L_1 - (i-1)(2g-2)$. *Põe-se* $E'_i = \frac{E}{E_i}$. *Existe* $f \in H^0(Hom(E_i, E'_i \otimes K))$ *diferente de zero (lema 5). Como* $f \neq 0$, *existe um inteiro* j, $1 \leq j \leq i$, *tal que* $f(E_k) = 0$, $k < j$ *e* $f(E_j) \neq 0$. *Então* f *induz um homomorfismo não nulo* $f' : L_j \longrightarrow E'_i \otimes K$. *Seja* s_j *uma secção não nula de* L_j *(existe por hipótese de indução). Tem-se* $f'(s_j) \neq 0$ *e* $div(f's_j) \geq div(s_j)$, *logo* $[f's_j] \geq L_j$. $[f's_j] \subset E'_i \otimes K$, *então* $[f's_j] \otimes K^* \subset E'_i$. *Se E tem secções suficientes, pela proposição anterior* E'_i *também tem. Seja* L_{i+1} *um fibrado linha maximal de* E'_i, *então*

$$\begin{aligned} deg(L_{i+1}) &\geq \deg[f's_j] \otimes K^* \geq \deg L_j - \deg K \\ &\geq \deg L_1 - (j-1)(2g-2) - (2g-2) \\ &\geq \deg L_1 - i(2g-2) \end{aligned}$$

porque $j \leq i$ *e pela hipótese de indução.* ■

Lema 7 *Seja E um fibrado vectorial indecomponível de dimensão* n *e grau* d *sobre uma curva suave* C *de género* g, *e seja* L_1 *um subfibrado linha com grau máximo. Então* $\deg L_1 \leq \frac{d}{n} + (g-1)(n-1)$.

Dem. *Podemos supor que E tem suficientes secções, pois se não tiver usamos um resultado de [S] que nos diz que existe um* r *tal que o fibrado* $E(r) := E \otimes H^r$, *onde H é uma secção do hiperplano com grau h, tem secções suficientes. E então se* $E(r) = (L'_1, ..., L'_n)$ *com* $\deg L'_1 \leq \frac{d+nhr}{n} + (g-1)(n-1)$ *tem-se* $E = (L_1, ..., L_n)$ *onde* $L_i = L'_i \otimes H^{-r}$ *e* $\deg L_1 \leq \frac{d}{n} + (g-1)(n-1)$. *Supõe-se, então, que E tem secções suficientes. Seja* $(L_1, L_2, ..., L_n)$ *uma decomposição maximal de E com* $\deg L_i \geq \deg L_1 - (i-1)(2g-2)$ *(se* $i \geq 1$*) (existe pelo lema 6). E tem-se pelo lema 4,* $\deg L_i - \deg L_{i-1} \leq 2g$ *(se* $i \geq 2$ *). Então*

$$-2(g-1) \leq \deg L_1 - \deg L_i \leq (i-1)(2g-2)$$

somando para $i = 1, ..., n$ *obtém-se*

$$-gn(n-1) \leq n \deg L_1 - d \leq (g-1)n(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -g(n-1) \leq \deg L_1 - \frac{d}{n} \leq (g-1)(n-1)$$

então $\deg L_1 \leq \frac{d}{n} + (g-1)(n-1)$. ■

I.2-Construção do fibrado de Atiyah

Nesta secção vamos construir o fibrado de Atiyah a partir do qual se vão poder escrever os fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis sobre uma curva elíptica. Assim poderemos decompor qualquer fibrado vectorial holomorfo sobre uma curva elíptica em fibrados de Atiyah tensorizados com um fibrado linha de grau zero.

Seja C uma curva elíptica, denota-se por A um fibrado linha fixo sobre C com grau 1, que vai corresponder a fixar um ponto base em C. É sabido que C pode ser identificada com a sua Jacobiana, quando se toma o ponto base como sendo zero.

Seja $\Im_{n,d}(C)$ o conjunto dos fibrados vectoriais indecomponíveis de dimensão n e grau d sobre C e $\bar{\Im}_{n,d}(C)$ o conjunto das classes de isomorfismo dos elementos de $\Im_{n,d}(C)$.

Considere-se a aplicação $E \longmapsto E \otimes A^r$, esta define uma correspondência 1-1 entre $\bar{\Im}_{n,d}(C)$ e $\bar{\Im}_{n,d+rn}(C)$.

Tendo em conta esta aplicação podemos assumir que $0 \leq d < n$.

Lema 8 *Se $degE = d$, então $h^0(E) - h^1(E) = d$. (Teorema de Riemann-Roch)*

Lema 9 *Seja E uma extensão não trivial de E_2 por E_1, $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \rightarrow 0$, então $H^0(Hom(E_1, E_2)) \neq 0$.*

Dem. *Imediato pelo lema 5, pois temos que K é trivial.* ■

Lema 10 *Seja C uma curva elíptica e E um fibrado vectorial indecomponível com $H^0(E) \neq 0$. Então E tem uma decomposição maximal $(L_1, ...L_n)$ com $L_i \geq L_1 \geq I$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Dem. *Usa-se o mesmo raciocínio da demonstração do lema 6. Supondo que se tinha a sucessão $0 = E_0 \subset E_1 \subset ... \subset E_i$ com $L_j = \frac{E_j}{E_{j-1}}$ fibrado linha de $\frac{E}{E_j}$, $j = 1, ..., i$ tal que $L_i \geq L_1 \geq I$. Seja $E'_i = \frac{E}{E_i}$. Da mesma maneira que no lema 6 existe j, $1 \leq j \leq i$, um homomorfismo não nulo $f' : L_j \rightarrow E'_i$ e uma secção s_j, não nula, de L_j tal que $[f's_j] \geq L_j$. Neste caso como o fibrado canónico K é trivial concluimos que $f's_j$ é uma secção não nula de E'_i. Se $f's_j$ é uma secção maximal (tem grau máximo), toma-se $L_{i+1} = [\ f's_j]$. Senão, seja L_{i+1} o fibrado linha maximal, então $deg(L_{i+1}) \geq \deg[\ f's_j] + 1$. Como C é elíptica, tem-se*

$$h^0(L_{i+1}[f's_j]^{-1}) - h^1(L_{i+1}[f's_j]^{-1}) = \deg(L_{i+1}[f's_j]^{-1}) = \deg(L_{i+1}) - \deg([f's_j]) \geq 1,$$

logo $h^0(L_{i+1}[f's_j]^{-1}) \geq 1 \Leftrightarrow L_{i+1}[f's_j]^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow L_{i+1} \geq [f's_j]$. Já se tinha $[f's_j] \geq L_j$, então $L_{i+1} \geq L_j \geq L_1$, por hipótese de indução. Encontrou-se o fibrado linha maximal L_{i+1} de E'_i satisfazendo as condições requeridas. Tome-se agora E_{i+1} como sendo o subfibrado de E cuja imagem é L_{i+1} na projecção canónica $E \longrightarrow E'_i$. ■

Lema 11 *Seja $E \in \Im_{n,d}(C)$, $0 \leq d < n$ e $k = h^0(E) > 0$. Então E tem subfibrado trivial I_k.*

Dem. *Pelo lema 10, E tem uma decomposição maximal $(L_1, ..., L_n)$ onde $L_i \geq L_1 \geq I$. Se $degL_1 > 0$, então $d = degE = \sum_{i=1}^{n} \deg L_i \geq n \deg L_1 \geq n$. Absurdo! Logo $degL_1 = 0$ e como $L_1 \geq I$ tem-se $L_1 = I$. Mas L_1 é um fibrado linha maximal de E, então para qualquer $t \in H^0(E)$, $div(t) = 0$, i.e., $H^0(E) \longrightarrow E_x$ é um monomorfismo para todo o $x \in C$. Logo $H^0(E)$ gera um subfibrado trivial I_k de E.* ■

Lema 12 *Seja $E \in \Im_{n,n}(C)$. Então E tem uma decomposição maximal $(L, ..., L)$ com $degL = 1$.*

Dem. *Pelo lema 8, $k = h^0(E) \geq n$. Pelo lema 10, E tem uma decomposição maximal $(L_1, ...L_n)$ com $L_i \geq L_1 \geq I$. Se $degL_1 = 0$, como no lema anterior E tem um subfibrado trivial I_k. Então $k = n$ e $E = I_n$, absurdo pois E é indecomponível. Logo $L_1 \geq I$.*

$$n = degE = \sum_{i=1}^{n} degL_i \geq n \deg L_1$$

Tem-se a igualdade sse $L_i \cong L_1$ para todo o i. Logo tem-se que ter $degL_1 = 1$ e $L_i \cong L_1$ para todo o i. ■

Lema 13 *Seja $0 \longrightarrow I_k \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$ I_k-completa, então $h^0(E) = h^0(E')$.*

Dem. *Considere-se a sucessão exacta longa de cohomologia*

$$0 \longrightarrow H^0(E'^*) \longrightarrow H^0(E^*) \longrightarrow H^0(I_k^*) \xrightarrow{\partial} H^1(E'^*) \longrightarrow .$$

∂ é um monomorfismo, i.e., $ker\partial = 0$. Mas $ker\partial \cong \mathrm{Im}(H^0(E^*) \longrightarrow H^0(I_k^*))$, logo

$$H^0(E^*) = \ker(H^0(E^*) \longrightarrow H^0(I_k^*)) \cong \mathrm{Im}(H^0(E'^*) \longrightarrow H^0(E^*)) \cong H^0(E'^*)$$

Por dualidade temos $h^1(E') = h^1(E)$.

Por outro lado, $degE = degE' - degI_k = degE' - 0 = degE'$. Então pelo lema 8,

$$h^0(E) = h^1(E') + \deg E' = h^0(E').$$

■

Vamos escrever $\Im_{n,d}$ para denotar $\Im_{n,d}(C)$ quando não for importante mencionar a curva C.

Com a existência de uma decomposição maximal para fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis com grau maior ou igual a zero podemos concluir o seguinte:

Lema 14 *Seja $E \in \Im_{n,d}$, $d \geq 0$. Então*

(I) $h^0(E) = \begin{cases} d & se \quad d > 0 \\ 0 \text{ ou } 1 & se \quad d = 0 \end{cases}$

(II) se $d < n$, E tem um subfibrado trivial I_k, onde $k = h^0(E)$ e $E' = \frac{E}{I_k}$ é indecomponível. Além disso, $h^0(E') = k$.

Dem. *Para* $d \geq n$, E *tem uma decomposição maximal* $(L_1, ..., L_n)$ *com* $L_i > I$ *(ver dem. do lema 12). Então* $H^1(L_i) = 0$ *e assim* $H^1(E) = 0$. *Logo pelo lema 8,* $H^0(E) = d$.

Para $d < n$, *tem-se:*

Se $d = 0$ *e* $H^0(E) = 0$, *não há nada a provar. Vamos supôr que* $H^0(E) \neq 0$ *se* $d = 0$. *Se* $d > 0$ *tem-se* $H^0(E) \neq 0$. *Pelo lema 11,* E *tem um subfibrado trivial* I_k, *com* $k = h^0(E)$. *Temos a sucessão exacta*

$$(E) : 0 \longrightarrow I_k \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

Como E *é indecomponível,* (E) *é* I_k *-completa. Pelo lema 13,* $h^0(E') = h^0(E) = k$, *então por dualidade* $h^1(E'^*) = k$. *A extensão* (E) *corresponde a um monomorfismo* $\partial : H^0(I_k^*) \longrightarrow H^1(E'^*)$, *como ambos os termos têm dimensão* k *conclui-se que* ∂ *é um isomorfismo. Vamos supôr que* E' *é decomponível, i.e.,* $E' = F \oplus G$, *com* $F \neq 0$ *e* $G \neq 0$. *Pode-se escrever* $\partial = \partial_1 \oplus \partial_2$, *onde* $\partial_1 : H^0(I_f^*) \longrightarrow H^1(F^*)$, $\partial_2 : H^0(I_g^*) \longrightarrow H^1(G^*)$ *são isomorfismos,* $f = h^1(F^*)$ *e* $g = h^1(G^*)$. ∂_1 *e* ∂_2 *correspondem a extensões*

$$(E_1) : 0 \longrightarrow I_f \longrightarrow E_1 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

$$(E_2) : 0 \longrightarrow I_g \longrightarrow E_2 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

$\partial_1 \oplus \partial_2$ *vai corresponder a* $(E_1) \oplus (E_2)$ *e logo a* (E). *Pelo lema 2,* $E \cong E_1 \oplus E_2$. *Absurdo, pois* E *é indecomponível. Logo* E' *é indecomponível. Falta provar (I) para* $0 \leq d < n$, *vamos fazê-lo usando indução em* n. *Se* $n = 1$ *então* $k = 0$ *ou* 1. *Supondo que é verdade para qualquer* $n' < n$, *em particular é para* $n - k$. *Como* $E' \in \Im_{n-k,d}$, *então por hipótese de indução*

$$h^0(E) = \begin{cases} d & \textit{se} \quad d > 0 \\ 0 \text{ ou } 1 & \textit{se} \quad d = 0 \end{cases}$$

Mas sabe-se que $h^0(E') = h^0(E)$ *(lema 13). Logo tem-se (I).* ∎

Lema 15 *Seja* $E' \in \Im_{n',d}$, $d \geq 0$, *e se* $d = 0$ *supomos que* $H^0(E') \neq 0$. *Então existe* $E \in \Im_{n,d}$, *único a menos de isomorfismo, dado pela extensão* $(E) : 0 \longrightarrow I_k \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$, *onde* $n = n' + k$ *e* $k = d$ *se* $d > 0$ *ou* 1 *se* $d = 0$.

Dem. *Pelo lema 14(I) temos* $h^0(E') = k$. *Então pelo lema 2 existe um único fibrado vectorial, a menos de isomorfismo, tal que* (E) *é* I_k*-completa. Vamos provar que* (E) *é* I_k*-completa sse* E *é indecomponível.*

$\Longleftarrow$ *lema 1*

$\Longrightarrow$ *Se* $E = F \oplus G$, *com* $F \neq 0$ *e* $G \neq 0$. *Pelo lema 13,* $h^0(E) = h^0(E') = k$ *e então* $H^0(I_k) \longrightarrow H^0(E)$ *é um isomorfismo.*

Seja $h^0(F) = f$, $h^0(G) = g$ *com* $f + g = k$. F *tem um subfibrado trivial* I_f *e* G *um subfibrado trivial* I_g, *onde* $I_f \oplus I_g = I_k$. *Então* $E' \cong \frac{E}{I_k} \cong \frac{F}{I_f} \oplus \frac{G}{I_g}$, *mas* E' *é indecomponível logo ou* $F = I_f$ *ou* $G = I_g$. *Se* $F = I_f$, *pensemos na sucessão dual de* (E) *dada por* $0 \longrightarrow E'^* \longrightarrow E^* \xrightarrow{p} I_k^* \longrightarrow 0$, *então* $E^* = I_f^* \oplus G$ *e tem-se o* *seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} I_f^* \oplus G \arrow[r, "p"] & I_k^* \arrow[d, "q"] \\ & I_f^* \arrow[ul, "j"'] \arrow[d] \\ & 0 \end{tikzcd}$$

onde q é uma projecção e j inclusão. Tem-se $jqp = 1$ logo $p \neq 0$ e assim $p^* : H^0(E^*) \to H^0(I_k^*)$ também é não nula, conclui-se que $\partial : H^0(I_k^*) \to H^1(E'^*)$ não é um monomorfismo. ■

Temos agora o resultado que nos dá a existência de um fibrado vectorial sobre a curva elíptica de grau zero e com secções.

Teorema 4 *(I) Existe $F_n \in \Im_{n,0}$, único a menos de isomorfismo, com $H^0(F_n) \neq 0$. Além disso, tem-se a sucessão exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow 0$.*

(II) Seja $E \in \Im_{n,0}$, então $E \cong L \otimes F_n$, onde L é um fibrado linha de grau zero, único a menos de isomorfismo (tal que $L^n \cong \det E$).

Dem. *(I) Considerem-se todos os $E \in \Im_{n,0}$ com $H^0(E) \neq 0$ e seja $\bar{\Im}_{n,0}$ o conjunto das correspondentes classes de isomorfismo. Vamos provar por indução que $\bar{\Im}_{n,0}$ consiste num único elemento F_n :*

Para $n = 1$ existe unicamente o fibrado trivial.

Supondo o resultado válido para $n' < n$. Se $E \in \bar{\Im}_{n,0}$, pelo lema 14(II), E tem um subfibrado vectorial trivial I_1 tal que $E' = \frac{E}{I}$ é indecomponível e $h^0(E') = 1$. Temos a sucessão exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$ com $E' \in \bar{\Im}_{n-1,0}$. Por hipótese de indução $E' \cong F_{n-1}$. Pelo lema 15 existe um único elemento $E \in \bar{\Im}_{n,0}$ dado pela extensão $0 \longrightarrow I \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$. Logo $\bar{\Im}_{n,0}$ tem um único elemento e a indução está concluída.

(II) Seja $E \in \Im_{n,0}$, então $E \otimes A \in \Im_{n,n}$. Pelo lema 12, $E \otimes A$ tem um decomposição maximal $(L_1, ..., L_1)$ com $degL_1 = 1$. $E \otimes A \otimes L_1^* \in \bar{\Im}_{n,0}$ e então por (I) $E \otimes A \otimes L_1^* \cong F_n$, i.e., $E \cong F_n \otimes L_1 \otimes A^*$. Fazendo $L = L_1 \otimes A^*$, vamos provar que se $F_n \cong F_n \otimes L$ então $L \cong I$. Como $F_n \otimes L$ é indecomponível temos pelo lema 14 que $h^0(F_n \otimes L) \leq 1$. Mais concretamente tem-se que $h^0(F_n \otimes L) = \begin{cases} 0 & se \quad L \neq I \\ 1 & se \quad L = I \end{cases}$ porque tensorizando a sucessão exacta $0 \to I \to F_n \to F_{n-1} \to 0$ com L obtém-se a sucessão exacta $0 \to L \to F_n \otimes L \to F_{n-1} \otimes L \to 0$ donde se tira a sucessão exacta longa de cohomologia

$$0 \to \underset{=0}{H^0(L)} \to H^0(F_n \otimes L) \to H^0(F_{n-1} \otimes L) \to \underset{=0}{H^1(L)} \to .$$

Se $n = 1$ o resultado é imediato.

Supondo que é verdade para todo $n' < n$, logo $h^0(F_{n-1} \otimes L) = 0$ sse $L \neq I$. Assim pela sucessão anterior tira-se que $h^0(F_n \otimes L) = \begin{cases} 0 & se \quad L \neq I \\ 1 & se \quad L = I \end{cases}$ para todo o n.

Então se tivermos $F_n \cong F_n \otimes L$, como $h^0(F_n) = 1$, conclui-se facilmente que $L = I$.

Como $detF_n \cong I$ tem-se $detE = det(F_n \otimes L) \cong L^n$. ■

Têm-se as seguintes propriedades:

Corolário 1 $F_n \cong F_n^*$.

Dem. *Por construção F_n é uma extensão sucessiva de fibrados linha triviais. Em particular F_n tem I como fibrado quociente. Então F_n^* tem I como subfibrado e por isso $H^0(F_n^*) \neq 0$.*

Assim $F_n^* \in \bar{\Im}_{n,0}$ e logo pelo teorema 1(I), $F_n \cong F_n^*$. ■

Corolário 2 *Para todo $k < n$ tem-se a sucessão exacta $0 \longrightarrow F_k \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-k} \longrightarrow 0$.*

Dem. *F_n tem um único fibrado linha trivial I e como $\frac{F_n}{I} \cong F_{n-1}$, segue que F_n tem para cada $k < n$ um único subfibrado E_k de dimensão k que é uma sucessiva extensão de fibrados linha triviais, e tem-se a sucessão exacta*

$$0 \longrightarrow E_k \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-k} \longrightarrow 0$$

Trocando k com $n-k$ e dualizando, obtém-se $0 \longrightarrow F_k^* \longrightarrow F_n^* \longrightarrow E_{n-k}^* \longrightarrow 0$. Pelo corolário anterior tem-se $F_k^* \cong F_k$ e $F_n^* \cong F_n$. Mas F_k é uma extensão sucessiva de fibrados linha triviais, então $F_k \cong E_k$ pela unicidade de E_k. ■

No resultado a seguir vamos definir uma aplicação entre $\Im_{h,0}$ e $\Im_{n,d}$, que nos vai preparar para a definição do fibrado de Atiyah.

Teorema 5 *Seja $A \in \Im_{1,1}$, fixo em C. Então A determina uma correspondência 1-1*

$$\alpha_{n,d} : \Im_{h,0} \longrightarrow \Im_{n,d}$$

onde $h = (n,d)$. Se escolhermos fibrados vectoriais E, representantes das classes de $\Im_{h,0}$, $\alpha_{n,d}$ pode ser unicamente determinada pelas seguintes propriedades:

(I) $\alpha_{n,0} = id$

(II) $\alpha_{n,d+n}(E) \cong \alpha_{n,d}(E) \otimes A$

(III) Se $0 < d < n$, tem-se a sucessão exacta $0 \longrightarrow I_d \longrightarrow \alpha_{n,d}(E) \longrightarrow \alpha_{n-d,d}(E) \longrightarrow 0$. Tem-se também que $det\alpha_{n,d}(E) \cong det(E \otimes A^d)$.

Dem. *A determina uma correspondência 1-1 $\Im_{n,d} \longleftrightarrow \Im_{n,d+n}$ pela operação $\otimes A$. Pode-se então considerar $0 \leq d < n$.*

Se $d = 0$, $h = n$ e toma-se $\alpha_{n,0} = id$.

Se $d > 0$, pelo lema 14(II), tem-se para cada $E \in \Im_{n,d}$ uma sucessão exacta $0 \longrightarrow I_d \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0$, com $E' \in \Im_{n-d,d}$.

Inversamente, para cada $E' \in \Im_{n-d,d}$, pelo lema 15, existe um único $E \in \Im_{n,d}$, a menos de isomorfismo, que é uma extensão de E por I_d.

Temos uma correspondência 1-1 entre $\Im_{n,d}$ e $\Im_{n-d,d}$.

Usando este facto em conjunto com (II), obtém-se uma correspondência 1-1 $\alpha_{n,d} : \Im_{h,0} \longrightarrow \Im_{n,d}$.

O número de vezes que (II) e (III) têm que ser usadas e a ordem em que elas ocorrem é dado explicitamente pelo algoritmo de Euclides para determinar h.

Vamos provar que $\det \alpha_{n,d}(E) \cong \det E \otimes A^d$*:*

Por (II) podemos considerar $0 \leq d < n$. Vamos provar por indução em n e em d.

Se $n = 1$, $d = 0$

$$\det \alpha_{1,0}(E) \cong I \cong \det E \otimes A^0$$

Se $n = 1$ e supondo que é verdadeiro para todo o $d' < d$.

$$\det \alpha_{1,d}(E) \cong \det \alpha_{1,d-1}(E) \otimes A \cong \det E \otimes A^{d-1} \otimes A \cong \det E \otimes A^d \cong A^d$$

por (II) e pela hipótese de indução. Supondo que é verdadeiro para todo $n' < n$.

$$det\alpha_{n,d}(E) \cong \det I_d \otimes det\alpha_{n-d,d}(E) \cong \det I_d \otimes \det E \otimes A^d \cong \det E \otimes A^d,$$

por (III) e pela hipótese de indução. Logo $det\alpha_{n,d}(E) \cong \det E \otimes A^d$ para todo o n e para todo o d. ■

Finalmente o fibrado de Atiyah.

Definição 10 *Define-se o fibrado vectorial de Atiyah de dimensão n e grau d como sendo $E_A(n,d) := \alpha_{n,d}(F_h)$ com $h = (n,d)$.*

Definição 11 *Um fibrado linha $L \in J_0(C)$ diz-se um elemento de n-torsão se $L^n \cong I$. Denota-se por T_n o subgrupo de $J_0(C)$ constituido pelos elementos de n-torsão.*

Corolário 3 *$\bar{\Im}_{n,d}(C)$ pode se identificado com C.*

Dem. *Pelo teorema 3 (ver mais adiante), para n e d fixos existe uma aplicação sobrejectiva*

$$\begin{array}{ccc} J_0(C) & \to & \bar{\Im}_{n,d}(C) \\ L & \longmapsto & E_A(n,d) \otimes L \end{array}$$

cuja fibra é isomorfa ao grupo $T_{n'}$, com $n' = \frac{n}{(n,d)}$. Seja

$$\begin{array}{ccc} n' : J_0(C) & \to & J_0(C) \\ L & \longmapsto & L^{n'} \end{array}$$

Tem-se a sucessão exacta $0 \to T_{n'} \to J_0(C) \xrightarrow{n'} J_0(C) \to 0$, tira-se que $\frac{J_0(C)}{T_{n'}} \cong J_0(C)$ e então

$$\bar{\Im}_{n,d}(C) \cong \frac{J_0(C)}{T_{n'}} \cong J_0(C) \cong C.$$

■

Observação 2 *Conclui-se que para qualquer dimensão n e grau d, o conjunto de classes de isomorfismo de fibrados vectoriais indecomponíveis sobre uma curva elíptica C, $\bar{\Im}_{n,d}(C)$, tem uma estrutura de variedade projectiva.*

Observação 3 *Como $J_0(C) \cong C$, existem n^2 fibrados linha de n-torsão.*

Observação 4 *Temos, então, uma correspondência 1-1 entre* $\Im_{n,d}(C)$ *e* C *tal que* $det : \Im_{n,d}(C) \longrightarrow \Im_{1,d}(C)$ *corresponde à aplicação* $H : C \longrightarrow C$*, onde*

$$H(x) = hx = \underbrace{x + ... + x}_{h\ vezes} \text{ e } h = (n, d).$$

Da observação anterior concluímos

Corolário 4 *Seja* $h = (n, d) = 1$*. Então se* $E \in \Im_{n,d}$*,*

(I) $E \to \det E$ *dá uma correspondência 1-1* $\Im_{n,d} \leftrightarrow \Im_{1,d}$

(II) $E \cong E_A(n, d) \otimes L$ *para algum fibrado linha* L *com grau* 0*.*

(III) $E_A(n, d) \otimes L \cong E_A(n, d)$ *sse* $L^n \cong I$*.*

(IV) $E_A(n, d)^* \cong E_A(n, -d)$*.*

I.3-Estrutura Multiplicativa

Na secção anterior vimos que se pode escrever todo o fibrado vectorial indecomponível holomorfo de dimensão n e grau d, com $(n,d)=1$, sobre uma curva elíptica C (curva de género 1), na forma $E_A(n,d)\otimes L$ com L fibrado linha sobre C de grau zero e $E_A(n,d)$ o fibrado de Atiyah construído na secção I.2. Nesta secção vamos ver que se pode escrever qualquer fibrado nesta forma, mesmo no caso $(d,n)\neq 1$. Para isso começamos por estudar a estrutura multiplicativa dos fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis de dimensão n e grau 0, com secções, sobre C, denotados por F_n, cuja existência foi provada na secção anterior. E a seguir passamos para a estrutura multiplicativa dos fibrados de Atiyah.

Por último vamos provar que todo o fibrado vectorial holomorfo indecomponível sobre uma curva elíptica é semiestável e é estável se e só se a sua dimensão e grau são primos entre si. Provamos primeiro para os fibrados de Atiyah e depois generaliza-se usando o facto de os fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis sobre uma curva algébrica se poderem escrever como sendo um fibrado de Atyiah tensorizado com um fibrado linha, que vai ser provado no início desta secção.

Lema 16 *(I)* $h^0(F_r\otimes F_k)=\min(r,k)$.

(II) Seja L um fibrado linha, então $h^0(L\otimes F_r\otimes F_k)=0$ a não ser que $L\geq I$.

Dem. *(I) Seja $r\leq k$, vamos provar por indução em r:*

Se $r=1$, $h^0(F_k)=1$.

Supondo que é verdade para $r-1$, temos a sucessão exacta

$$0\to I\to F_r\to F_{r-1}\to 0$$

Se aplicarmos $Hom(.,F_k)$ á sucessão tem-se a sucessão exacta

$$0\to Hom(F_{r-1},F_k)\to Hom(F_r,F_k)\xrightarrow{\beta} Hom(I,F_k)\to 0$$

Temos uma injecção $\iota: F_r\to F_k$ (corolário 2) e $\beta_*(\iota)$ é um gerador do espaço vectorial de dimensão 1, $H^0(Hom(I,F_k))$.

$$h^0(Hom(F_r,F_k))=h^0(Hom(F_{r-1},F_k))+1$$

$F_r\cong F_r^*$ pelo corolário 1, então $Hom(F_r,F_k)\cong F_r\otimes F_k$, assim

$$h^0(F_r\otimes F_k)=h^0(F_{r-1}\otimes F_k)+1\underset{(*)}{=}(r-1)+1=r.$$

tem-se $(*)$ pela hipótese de indução.

(II) $F_r=(I,I,...,I)$, $F_k=(I,I,...,I)$ então $L\otimes F_r\otimes F_k=(L,L,...,L)$ assim $H^0(L\otimes F_r\otimes F_k)=0$ a não ser que $H^0(L)\neq 0$, i.e., $L\geq I$. ■

Lema 17 $F_r\otimes F_k\cong \bigoplus_{j=1}^{\min(r,k)} F_{r_j}$*, onde* $\sum_j r_j=r.k$.

Dem. *$F_r \otimes F_k \cong \bigoplus_{j=1}^{N} E_j$, decomposição em soma directa com factores indecomponíveis.*

Tem-se que $\deg E_j = 0$, $\forall j$. Se não, como $\sum_j \deg E_j = 0$, temos $\deg E_j > 0$ pelo menos para um j. Seja L um fibrado linha com grau 0 e $L \ncong I$. Então $H^0(L \otimes F_r \otimes F_k) = 0$ pelo lema 16. Mas $\deg(L \otimes E_j) > 0 \Longrightarrow h^0(L \otimes E_j) > 0$ (lema 8). Por outro lado $h^0(L \otimes E_j) \leq h^0(L \otimes F_r \otimes F_k) = 0$, o que dá uma contradição. Logo $\deg E_j = 0$ $\forall j$.

Então $E_j \in \Im_{r_j,0}$, usando o teorema 1(II) tem-se $E_j \cong L_j \otimes F_{r_j}$, com L_j um fibrado linha de grau zero.

$L_j \cong I$, $\forall j$, pois se $L_j \ncong I$, então $H^0(L_j^* \otimes F_r \otimes F_s) = 0$ pelo lema 16. Mas $H^0(F_{r_j}) \neq 0$, absurdo, pois

$$H^0(L_j^* \otimes F_r \otimes F_k) = 0 \Longrightarrow H^0(L_j^* \otimes E_j) = 0 \Longrightarrow H^0(F_j) = 0.$$

Logo $L_j \cong I$, $\forall j$.

Como $h^0(F_{r_j}) = 1$, tem-se pelo lema 16

$$\begin{aligned} \min(r,k) &= h^0(F_r \otimes F_k) = h^0(\bigoplus_{j=1}^{N} E_j) \\ &= h^0(\bigoplus_{j=1}^{N} F_{r_j}) = \sum_{j=1}^{N} h^0(F_{r_j}) = N. \end{aligned}$$

■

Proposição 4 *Seja $(\digamma, +, .)$ um anel comutativo com unidade e satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Com respeito à adição $\digamma$ é um grupo abeliano livre com os elementos f_r, $r = 1, 2, \ldots$ como geradores.

(b) $f_r.f_k = \sum_{j=1}^{\min(r,k)} f_{r_j}$, onde $\sum_j r_j = r.k$ (observe-se que se tem $f_1 = e$).

(c) $f_r.f_r = f_r^2 = e + \sum_{j=2}^{r} f_{r_j}$, $\forall r \geq 1$.

Então $\digamma$ é único a menos de isomorfismo e a sua estrutura multiplicativa é dada pela fórmula

$$f_r.f_k = f_{r-k+1} + f_{r-k+3} + \ldots + f_{r+k-1} \ (r \geq k).$$

Dem. *Se $k = 1$, $f_k = e$ e a fórmula é trivial.*

Se $k = 2$, vamos provar que $f_r.f_2 = f_{r-1} + f_{r+1}$.

$r = 2$, por c) $f_2.f_2 = e + \sum_{j=2}^{2} f_{r_j} = e + f_3$.

Supondo que é verdadeira para $r-1$ ($r \geq 3$). Seja $f_2 f_r = f_t + f_{2r-t}$. Considere-se a equação

$$(f_2 f_{r-1}) f_r = f_{r-1}(f_2 f_r) = f_{r-1}(f_t + f_{2r-t}) \ (*)$$

Por hipótese de indução $f_2 f_{r-1} = f_{r-2} + f_r$, *então* $(f_2 f_{r-1}) f_r = (f_{r-2} + f_r) f_r$, *e este tem* $2r-2$ *termos. O lado direito de (*) tem* $\min(r-1,t) + \min(r-1, 2r-t)$ *termos. Então tem-se a igualdade*

$$\min(r-1,t) + \min(r-1, 2r-t) = 2r-2$$

então $t \geq r-1$ *e* $2r - t \geq r-1$, *daqui sai que* $t = r-1$ *ou* $t = r$ *ou* $t = r+1$.

As únicas possibilidades vão ser:

$$f_2 f_r = f_{r-1} + f_{r+1}$$

$$f_2 f_r = f_r + f_r = 2f_r$$

Se tivermos a segunda, então $f_2 f_r^2 = 2f_r^2$ *que vai ter* $2r$ *termos, mas por outro lado* $f_2 f_r = f_2 + \sum_{J=2}^{r} f_2 f_{r_j} = f_2 + 2\sum_{J=2}^{r} f_{r_j}$, *e este tem* $2r-1$ *termos. Absurdo! Logo tem-se que ter* $f_2 f_r = f_{r-1} + f_{r+1}$.

Se $k \geq 3$.

Por indução em k. *Supomos que a fórmula é válida para* $k-2$ *e para* $k-1$. *Considere-se a equação de associatividade*

$$f_2(f_{k-1} f_r) = (f_2 f_{k-1}) f_r.$$

Aplicando a hipótese de indução no lado esquerdo da equação e o caso $k = 2$ *no lado direito, tem-se*

$$f_2(f_{r-k+2} + f_{r-k+4} + ... + f_{r+k-2}) = (f_{k-2} + f_k) f_r.$$

Agora, aplica-se a hipótese de indução no lado direito da equação anterior e o caso $k = 2$ *no lado esquerdo e tem-se*

$$f_{r-k+1} + 2f_{r-k+3} + ... + 2f_{r+k-3} + f_{r+k-1} = f_{r-k+3} + ... + f_{r-k+3} + f_r f_k.$$

Logo $f_r f_k = f_{r-k+1} + f_{r-k+3} + ... + f_{r+k-1}$. ■

Lema 18 *E fibrado vectorial de dimensão* r, *tem-se que* $End(E) \cong I \oplus E'$ *onde* E'_x *é o subespaço de* $End(E_x)$ *que consiste nos endomorfismos de traço nulo.*

Dem. *Seja* $\Phi_x \in End(E_x)$ *e traço*$(\Phi_x) = \lambda_x$. *Então* $\Phi_x = \frac{\lambda_x}{r} 1_x + (\Phi_x - \frac{\lambda_x}{r} 1_x)$ *dá o isomorfismo canónico, onde* 1_x *é o endomorfismo identidade de* E_x. ■

Usando este resultado, a proposição 3 e as propriedades de F_r provadas nos lemas 16 e 17, concluímos que a estrutura multiplicativa dos F_r é dada por:

Proposição 5 *Se* $r \geq k$ *então* $F_r \otimes F_k \cong F_{r-k+1} \oplus F_{r-k+3} \oplus ... \oplus F_{r+k-1}$.

Vamos caracterizar o fibrado vectorial dos endomorfismos de um fibrado vectorial holomorfo indecomponível, que vai ser usado nas demonstrações dos resultados sobre a estrutura multiplicativa.

Lema 19 *Seja* $E \in \Im_{n,d}$ *com* $(n,d) = 1$. *Então* $End(E) \cong \bigoplus_{i=1}^{n^2} L_i$, *onde* L_i *são fibrados linha de* n*-torsão e* $L_i \ncong L_j$ *se* $i \neq j$.

Dem. *Para cada fibrado linha* L_i *com ordem que divide* n *tem-se* $E \otimes L_i \cong E$ *(corolário 3). Então* $E^* \otimes E \otimes L_i \cong E^* \otimes E \Leftrightarrow End(E) \otimes L_i \cong End(E)$. I *é parcela directa de* $End(E)$, *então* $End(E)$ *contém cada* L_i *como parcela directa. Mas existem* n^2 *tais* L_i *e* $End(E)$ *é um fibrado com dimensão* n^2, *logo* $End(E) \cong \bigoplus_{i=1}^{n^2} L_i$.
■

Têm-se as seguintes propriedades:

Lema 20 *Seja* $(n,d) = 1$, *então*

(I) $E_A(n,d) \otimes F_h$ *é indecomponível.*

(II) $E_A(n,d) \otimes F_h \cong E_A(nh, dh)$.

Dem. *(I) Seja* $E = E_A(n,d) \otimes F_h$, *então*

$$End(E) \cong End(E_A(n,d)) \otimes End(F_h) \cong \bigoplus_{i=1}^{n^2} L_i \otimes \bigoplus_{k=1}^{h} F_{2k-1}$$

pela proposição 4 e pelo lema 19. $H^0(L_i \otimes F_k) = 0$ *a não ser que* $L_i \cong I$ *(lema 16(II)), mas isto acontece só para um* i. *Então* $H^0(End(E)) \cong H^0(End(F_h))$, *sendo o isomorfismo dado por* $Id \otimes \Phi \leftrightarrow \Phi$ *onde* Id *é o endomorfismo identidade de* $E_A(n,d)$. *Temos um isomorfismo de álgebras. A estrutura da álgebra* $H^0(End(E))$ *determina se* E *é ou não é decomponível. Então, como* F_h *é indecomponível segue que* $E = E_A(n,d) \otimes F_h$ *é indecomponível.*

(II) Vamos provar com dupla indução em n *e em* h. *Supomos que o lema é válido (para* $h, n \geq 2$*)*

(a) para $h-1$ *e para qualquer* n

(b) para qualquer h *e qualquer* $k \leq n-1$.

Se $h = 1$, $F_h = I$ *e tem-se o resultado para qualquer* n.

Se $n = 1$, $E_A(1,d) = A^d$ *e* $E_A(nh, dh) = A^d \otimes F_h$.

Tem-se a sucessão exacta

$$0 \to I \to F_h \to F_{h-1} \to 0$$

tensorizando com $E_A(n,d)$ *obtém-se*

$$0 \to E_A(n,d) \to E_A(n,d) \otimes F_h \to E_A(n,d) \otimes F_{h-1} \to 0 \ (*)$$

Como $E_A(n,d) \otimes A \cong E_A(n, d+n)$, *é suficiente considerar* $0 < d < n$. *Então* $0 < dh < nh$ *e* $0 < d(h-1) < n(h-1)$.

Seja $E_1 = E_A(n,d)$, $E_2 = E_A(n,d) \otimes F_h$, $E_3 = E_A(n,d) \otimes F_{h-1}$, $d_i = \deg E_i$ *e* $n_i = \dim E_i$.

Então (*) pode-se escrever $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$. *Por (I),* $E_i \in \Im_{n_i,d_i}$ *com* $0 < d_i < n_i$. *Pelo lema 14,* $h^0(E_i) = d_i$ *e* $H^0(E_i)$ *gera um subfibrado trivial* I_{d_i}

e $E'_i = \frac{E_i}{I_{d_i}}$ *é indecomponível. Assim* $E'_i \in \Im_{n_i-d_i,d_i}$ *e* $E_i \cong E_A(n_i, d_i)$ *sse* $E'_i \cong E'_A(n_i - d_i, d_i)$*. Temos o diagrama de sucessões exactas*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & I_{d_1} & \rightarrow & I_{d_2} & \rightarrow & I_{d_3} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & E_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & E'_1 & \rightarrow & E'_2 & \rightarrow & E'_3 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Aplicando a hipótese de indução (a) na última coluna do diagrama, tem-se $E_3 \cong E_A(n_3, d_3)$ *e então* $E'_3 \cong E'_A(n_3 - d_3, d_3)$ *e outra vez por (a)* $E'_3 \cong E_A(n-d, d) \otimes F_{h-1}$*. Também se tem* $E'_1 = E_A(n - d, d)$ *e assim*

$$\begin{aligned} h^0(Hom(E'_1, E'_3)) &= h^0(E'_1 \otimes E'^*_3) = h^0(E_A(n-d,d) \otimes E_A(n-d,d)^* \otimes F_{h-1}) \\ &= h^0(End(E_A(n-d,d)) \otimes F_{h-1}) \\ &= h^0(\sum_{i=1}^{(n-d)^2} L_i \otimes F_{h-1}) = 1 \ (**) \end{aligned}$$

As classes de estensões de E'_3 *por* E'_1 *correspondem a elementos de* $H^1(Hom(E'_3, E'_1))$*, e as extensões correspondentes a* a*,* λa*, onde* $a \in H^1(Hom(E'_3, E'_1))$ *e* λ *é uma constante não nula, definem fibrados vectoriais isomorfos. Neste caso* $H^1(Hom(E'_3, E'_1))$ *tem dimensão 1 por dualidade de (**), então quaisquer duas extensões não triviais definem fibrados vectoriais isomorfos.*

A última linha do diagrama é uma extensão e

$$0 \rightarrow E_A(n,d) \rightarrow E_A(n,d) \otimes F_h \rightarrow E_A(n,d) \otimes F_{h-1} \rightarrow 0$$

é outra extensão e ambas são não triviais porque E'_2 *e* $E_A(n,d) \otimes F_h$ *são indecomponíveis (por (I)). Então*

$$E'_2 \cong E_A(n,d) \otimes F_h \cong E_A(h(n-d), d) \text{ pela hipótese de indução.}$$

Logo $E_2 \cong E_A(nh, dh)$*.* ■

Corolário 5 *Para qualquer* n*,* d*,* $E_A(n,d)^* \cong E_A(n, -d)$*.*

Dem. *Seja* $h = (n,d)$*,* $n = n'h$ *e* $d = d'h$*. Pelo lema 20(II),* $E_A(n,d) \cong E_A(n', d') \otimes F_h$ *e então* $E_A(n,d)^* \cong E_A(n',d')^* \otimes F^*_h$*. Mas pelo corolário 1,* $F^*_h \cong F_h$ *e pelo corolário 4,* $E_A(n',d')^* \cong E_A(n', -d')$*. Assim tem-se*

$$E_A(n,d)^* \cong E_A(n', -d') \otimes F_h \cong E_A(n'h, -d'h) = E_A(n, -d)$$

pelo lema 20(II). ■

Corolário 6 *Para qualquer* n*,* d*,* $E_A(n,d) \otimes L \cong E_A(n,d)$ *sse* $L^{\frac{n}{h}} \cong I$*, onde* $(n,d) = h$*.*

Dem. *Seja* $n' = \frac{n}{h}$ *e* $d' = \frac{d}{h}$*. Pelo lema 20(II),* $E_A(n,d) \cong E_A(n',d') \otimes F_h$*.*

Supondo que L *tem ordem que divide* n'*, então pelo corolário 4,* $E_A(n',d') \otimes L \cong E_A(n',d')$ *e então*

$$E_A(n,d) \otimes L \cong E_A(n',d') \otimes F_h \otimes L \cong E_A(n',d') \otimes F_h \cong E_A(n,d)$$

Inversamente, supondo que L *é tal que* $E_A(n,d) \otimes L \cong E_A(n,d)$*, então*

$$\begin{aligned} End(E_A(n,d) \otimes L) &\cong End(E_A(n,d)) \cong End(E_A(n',d')) \otimes End(F_h) \\ &\cong \sum_{i=1}^{n'^2} L_i \otimes \sum_{k=1}^{h} F_{2k-1} \end{aligned}$$

este último pela proposição 4 e pelo lema 19. Assim $L \cong L_i$ *para algum* i*, i.e.,* $L^{n'} \cong I$*.* ■

Lema 21 *Seja* $(n,d) = 1$*,* $0 < d < n$ *e seja* L *um fibrado linha com grau zero. Então temos a seguinte sucessão exacta*

$$0 \to I_{dh} \to E_A(nh,dh) \otimes L \to E_A(nh-dh,dh) \otimes L' \to 0$$

onde L' *é qualquer fibrado linha tal que* $L'^{(n-d)} \cong L^n$*.*

Dem. *O caso* $h = 1$ *resulta do corolário 4. Depois faz-se indução em* h*, e para isso usa-se o diagrama da demonstração do lema 20(II).* ■

Podemos então escrever todo o fibrado vectorial holomorfo indecomponível sobre uma curva elíptica a partir de um fibrado de Atiyah.

Teorema 6 *Todo o fibrado* $E \in \Im_{n,d}$ *é da forma* $E_A(n,d) \otimes L$ *com* L *fibrado linha de grau zero sobre* C*, e* $E_A(n,d) \otimes L \cong E_A(n,d)$ *sse* $L^{\frac{n}{h}} \cong I$*, onde* $(n,d) = h$*. Além disso se* $\alpha_{n,d} : \Im_{h,0} \longrightarrow \Im_{n,d}$ *é a correspondência 1-1 dada pelo teorema 2, tem-se* $\alpha_{n,d}(L^{\frac{n}{h}} \otimes F_h) \cong L \otimes \alpha_{n,d}(F_h) \cong L \otimes E_A(n,d)$*.*

Dem. *Indução em* n*.*

Supondo $0 < d < n$ *(se* $d = 0$ *temos o teorema 1), tem-se a sucessão exacta*

$$0 \to I_d \to E \to E' \to 0.$$

Por hipótese de indução $E' \cong E_A(n-d,d) \otimes L'$ *para algum fibrado linha* L'*. Seja* L *qualquer fibrado linha tal que* $L^{\frac{n}{h}} \cong L'^{\frac{n-d}{h}}$*, onde* $h = (n,d)$*. Pelo lema 21 tem-se a sucessão exacta*

$$0 \to I_d \to E_A(n,d) \otimes L \to E_A(n-d,d) \otimes L' \to 0$$

Logo $E \cong E_A(n,d) \otimes L$*.* ■

Caracterizamos, agora, a estrutura multiplicativa dos fibrados de Atiyah.

Lema 22 *Seja* $(n,d) = (n',d') = 1$*,* $(n,n') = k$ *e* $E_A(n,d) \otimes E_A(n',d') \cong \sum_i E_i$*, onde* $E_i \in \Im_{n_i,d_i}$*. Então* n_i *divide* $\frac{nn'}{k}$ *e* $(n_i,d_i) = 1$*.*

Dem. *Seja* $E = E_A(n,d) \otimes E_A(n',d')$. *Pelo lema 19,* $EndE \cong (\sum L_j) \otimes (\sum L'_m)$, *onde* L_j *e* L'_m *são fibrados linha com ordens que dividem* n *e* n' *respectivamente. Seja* $h_i = (n_i, d_i)$, *então pelo lema 20 tem-se* $E_i \cong \bar{E}_i \otimes F_{h_i}$, *com* $\bar{E}_i \in \Im_{\frac{n_i}{h_i}, \frac{d_i}{h_i}}$. *Outra vez pelo lema 20(II),*

$$E_i \cong E_A(\frac{n_i}{h_i}, \frac{d_i}{h_i}) \otimes F_{h_i} \otimes L \cong E_A(\frac{n_i}{h_i}, \frac{d_i}{h_i}) \otimes L \otimes F_{h_i},$$

com L *fibrado linha de grau* 0. *Então* $EndE_i \cong (\sum \bar{L}_n) \otimes (\sum_{l=1}^{h_i} F_{2l-1})$, *onde* $\bar{L}_n$ *são fibrados linha cuja ordem divide* $\frac{n_i}{h_i}$. *Mas* $End(E_i)$ *é uma parcela directa de* $End(E)$, *então tem-se que decompor completamente em fibrados linha. E isto só é possível se* $h_i = 1$, *i.e.,* $(n_i, d_i) = 1$. $\bar{L}_m$ *tem que ser da forma* $L_j \otimes L'_m$ *e então tem ordem que divide* $\frac{nn'}{k}$. *Logo* n_i *divide* $\frac{nn'}{k}$. ■

Lema 23 *Sejam* $(n,d) = (n_1,d_1) = (n,n_1) = 1$. *Então* $E_A(n,d) \otimes E_A(n_1,d_1) \cong E_A(nn_1, nd_1 + n_1 d)$.

Dem. *Seja* $E = E_A(n,d) \otimes E_A(n_1,d_1)$. *Pelo lema 19,* $EndE \cong \sum_{i,m} L_i \otimes L'_m$ *onde* L_i *é um fibrado linha com ordem que divide* n *e* L_m *um fibrado linha com ordem que divide* n_1. *Se* $L_i \otimes L'_m \cong I$ *então* $L_i \cong L'_m \cong I$ *porque* $(n,n_1) = 1$ *e isto ocorre só para um par* i,m. *Assim* $h^0(End(E)) = 1$, *logo todo o endomorfismo de* E *é múltiplo da identidade. Conclui-se que* E *é indecomponível e então* $E \in \Im_{nn_1, nd_1+n_1 d}$.

$$\det E \cong (\det E_A(n,d))^{n_1} \otimes (\det E_A(n_1,d_1))^n \cong A^{dn_1} \otimes A^{d_1 n} \cong A^{dn_1 + d_1 n}$$

e

$$\det E_A(nn_1, nd_1 + n_1 d) \cong A^{dn_1 + d_1 n}.$$

Como $(nn_1, nd_1 + n_1 d) = 1$, *pelo corolário 4 temos* $E \cong E_A(nn_1, nd_1 + n_1 d)$. ■

Lema 24 *Seja* $(n,d) = 1$, $n = n_1 ... n_r$ *factorização de* n *em potências de primos, i.e.,* $n_i = p_i^{k_i}$ *onde* p_i *são primos distintos. Então* $E_A(n,d) \cong E_A(n_1,d_1) \otimes ... \otimes E_A(n_r,d_r)$, *com* $\sum(\frac{d_i}{n_i}) = \frac{d}{n}$ *uma decomposição qualquer de* $\frac{d}{n}$. *Em particular,* $(n_i,d_i) = 1$.

Dem. *Se* $E_A(n,d) \cong E_A(n_1,d_1) \otimes ... \otimes E_A(n_r,d_r)$, *igualando os graus de ambos os termos tem-se*

$$d = \sum_i n_1 n_2 ... n_{i-1} d_i n_{i+1} ... n_r = n \sum_i \frac{d_i}{n_i}.$$

onde $n = n_1 ... n_r$. *Inversamente seja* $(d_1, ..., d_n)$ *uma sucessão de inteiros tal que* $\sum_i (\frac{d_i}{n_i}) = \frac{d}{n}$. *Como* $(n,d) = 1$ *então* $(n_i, d_i) = 1$. *Como os* n_i*'s são primos entre si, podemos aplicar o lema 23* $(n-1)$ *vezes e obter*

$$E_A(n,d) \cong E_A(n_1,d_1) \otimes ... \otimes E_A(n_r,d_r)$$

A equação $\sum(\frac{d_i}{n_i}) = \frac{d}{n}$ *tem sempre soluções* (d_i) *e se* (d_i) *é uma solução então* $(d_i + m_i n_i)$ *com* $\sum m_i = 0$ *também vai ser:* $E_A(n_i, d_i + m_i n_i) \cong E_A(n_i, d_i) \otimes A^{m_i}$.

Logo

$$\begin{aligned}E_A(n,d) &\cong E_A(n_1,d_1)\otimes A^{m_1}\otimes \dots \otimes E_A(n_s,d_r)\otimes A^{m_r}\\ &\cong E_A(n_1,d_1)\otimes \dots \otimes E_A(n_r,d_r)\otimes A^{m_1+\dots+m_r}\\ &\cong E_A(n_1,d_1)\otimes \dots \otimes E_A(n_r,d_r).\end{aligned}$$

porque $m_1+\dots+m_r=0$. ■

Lema 25 *Seja* $(n,d)=(n',d')=1$. *Então*

(I) $E_A(n,d)\otimes E_A(n',d')$ *tem um fibrado linha como parcela directa sse* $n'=n$ *e* $d'\equiv -d \bmod n$.

(II) $E_A(n,d)\otimes E_A(n',d')\cong F\otimes E_A(n'',d'')$, *onde* F *é uma soma directa de fibrados linha.de grau zero.*

Dem. *(I) Segue do lema 19.*

(II) Deduz-se do lema 19 e de (I). ■

Teorema 7 *Seja* p *primo tal que* $(p,d)=(p,d')=1$. *Então* $E_A(p^l,d)\otimes E_A(p^k,d')\cong I\otimes(\sum L_i)\otimes E_A(p^m,d'')$, *onde* L_i *são fibrados linha de grau zero,* I *é um fibrado vectorial trivial e* m *e* d'' *são inteiros que podem ser determinados.*

Dem. *Se* $l>k$.

Seja $E=E_A(p^l,d)\otimes E_A(p^k,d')\cong F\otimes E_A(p^n,d)$, *pelo lema 25(II), onde* $n\le l$ *e* F *é soma directa de fibrados linha.*

Vamos ver que $n=l$.

Se $n\le l-1$, *operando com* $E_A(p^k,-d')\otimes$ *obtém-se*

$$(\sum_i L_i)\otimes E_A(p^l,d)\cong F\otimes E_A(p^k,-d')\otimes E_A(p^n,d)$$

com L_i *fibrados linha cuja ordem divide* p^k *(lema 19). Pelo lema 23, cada parcela directa do termo direito tem dimensão* $\le p^{l-1}$ *enquanto no termo esquerdo têm dimensão igual a* p^l. *Absurdo! Logo* $n=l$.

Faz-se $d''=p^{l-k}d'+d$.

Prova-se que $F=I_{p^k}$:

$$EndE\cong(\sum L_i)\otimes(\sum L'_j)\cong(\sum L_i)\otimes EndF$$

onde L_i *e* L'_j *são fibrados linha cuja ordem divide* p^l *e* p^k *respectivamente.*

Se $F=\sum_{t=1}^{p^k}\bar L_t$, *então* $\bar L_1\otimes\bar L_t^*$ *são parcelas directas de* $EndF$ *e então de* $EndE$, *pois um dos* $L_i\cong I$. *Tem-se* $\bar L_1\otimes\bar L_t^*\cong L_i\otimes L'_j$ *para algum* i,j. *Então* $\bar L_1\otimes\bar L_t^*$ *tem ordem que divide* p^l. *Assim pelo corolário 4*

$$\bar L_1\otimes E_A(p^l,d'')\cong\bar L_t\otimes E_A(p^l,d'').$$

O que implica que

$$F \otimes E_A(p^l, d'') \cong I_{p^k} \otimes \bar{L}_1 \otimes E_A(p^l, d'')$$

em que $\bar{L}_1 \otimes E_A(p^l, d'') \in \Im_{p^l, d''}$.

Se $l = k$. *Quere-se provar que* $E_A(p^l, d_1) \otimes E_A(p^l, d_2) \cong I_{p^r} \otimes (\sum L_i) \otimes E_A(p^r, d_3)$. *Tem-se que* $(p^l, d_1 + d_2) = p^{l-r}$ *e* $(d_1, p) = (d_2, p) = 1$, *basta fazer no caso anterior* $d' = d_3$ *e* $d = -d_2$ *e o raciocínio é análogo.* ■

Provar a não existência de secções para fibrados vectoriais indecomponíveis holomorfos, sobre uma curva elíptica, com grau negativo.

Lema 26 *Numa curva elíptica, um fibrado vectorial indecomponível* E *com grau negativo não tem secções.*

Dem. *Se* E *tem a secção* s, *seja* $[s]$ *o subfibrado linha de* E *gerado por* s. *Então* $[s]$ *tem grau* ≥ 0. *Mas pelo lema 7,* $0 \leq \deg[s] \leq \frac{d}{n} + (g-1)(n-1) = \frac{d}{n} < 0$. *Absurdo! Logo* E *não tem secções.* ■

Vamos provar que todo o fibrado de Atiyah é semiestável para qualquer dimensão e grau e é estável sse a dimensão e grau são primos entre si.

Lema 27 $E_A(n, d)$ *é semiestável para qualquer* n, d.

Dem. *Seja* $\mu = \frac{d}{n}$ *o declive de* $E_A(n, d)$. *Supondo que* E *não é semiestável, tem-se que existe um subfibrado próprio indecomponível* $F \subset E_A(n, d)$ *de dimensão* n_F *e grau* d_F *tal que* $\mu_F = \frac{d_F}{n_F} > \mu$. *Pelo teorema 3,* $F \cong E_A(n_F, d_F) \otimes L$ *com* L *fibrado linha de grau zero sobre* C. *A inclusão* $F \hookrightarrow E_A(n, d)$ *origina uma secção não nula do fibrado* $Hom(F, E_A(n, d))$.

$$\begin{aligned} Hom(F, E_A(n,d)) &\cong E_A(n_F, d_F)^* \otimes L^* \otimes E_A(n, d) \\ &\cong E_A(n_F, -d_F) \otimes E_A(n, d) \otimes L^*. \end{aligned}$$

pelo corolário 5. Sejam $h = (n, d)$, $h_F = (n_F, d_F)$, $n = hn'$, $d = hd'$, $n_F = h_F n'_F$ *e* $-d_F = h_F d'_F$, *tem-se* $(n', d') = 1$ *e* $(n'_F, d'_F) = 1$. *Sejam* $p_1, ..., p_r$ *factores primos comuns de* n' *e de* n'_F, $n' = p_1^{k_1} ... p_r^{k_r} m$, $n'_F = p_1^{k'_1} ... p_r^{k'_r} m'$, *onde* m *e* m' *não têm nenhum dos* p_i*'s como factores. Em particular* $(m, m') = 1$, $(p_i, m) = 1$ e $(p_i, m') = 1$

Pelos lemas 20(II), 23 e 24 tem-se

$$E_A(n, d) \cong E_A(n', d') \otimes F_h \cong E_A(p_1^{k_1}, d_1) \otimes ... \otimes E_A(p_r^{k_r}, d_r) \otimes E_A(m, l) \otimes F_h \ (1)$$

e

$$E_A(n_F, -d_F) \cong E_A(n'_F, d'_F) \otimes F_{h_F} \cong E_A(p_1^{k'_1}, d'_1) \otimes ... \otimes E_A(p_r^{k'_r}, d'_r) \otimes E_A(m', l') \otimes F_{h_F} \ (2)$$

para algum d_i, d'_i, l, l' *com* $(p_i, d_i) = (p_i, d'_i) = 1$

Pelo teorema 4,

$$E_A(p_i^{k_i}, d_i) \otimes E_A(p_i^{k'_i}, d'_i) \cong I' \otimes (\sum_j L'_j) \otimes E_A(p_i^{k''_i}, d''_i) \ (3)$$

onde I' é um fibrado trivial, L'_j fibrados linha com grau zero e k''_i, d''_i inteiros adequados.

Pelo lema 23, $E_A(m,l) \otimes E_A(m',l') \cong E_A(mm', lm' + ml')$ (4). Então, por (1), (2), (3) e (4) deduz-se que

$$E_A(n_F, -d_F) \otimes E_A(n,d) \otimes L^* \cong I \otimes (\sum L_\alpha) \otimes E_A(n'', d'') \otimes F_h \otimes F_{h_F}$$

com $n'' = p_1^{k''_1} ... p_r^{k''_r} mm'$, I fibrado trivial, L_α fibrados linha com grau zero.

$$\begin{aligned} \mu(I \otimes (\sum L_\alpha) \otimes E_A(n'', d'')) &= \mu(I) + \mu(\sum L_\alpha) + \mu(E_A(n'', d'')) + \mu(F_h) + \mu(F_{h_F}) \\ &= 0 + 0 + \frac{d''}{n''} + 0 + 0 = \frac{d''}{n''} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mu(E_A(n_F, -d_F) \otimes E_A(n,d) \otimes L^*) &= \mu(E_A(n_F, -d_F)) + \mu(E_A(n,d)) + \mu(L^*) \\ &= \frac{-d_F}{n_F} + \frac{d}{n} + 0 = -\mu_F + \mu. \end{aligned}$$

Assim $-\mu_F + \mu = \frac{d''}{n''}$. Se $\mu_F = \frac{d_F}{n_F} > \mu$ então $d'' < 0$.

$$\begin{aligned} H^0(Hom(F, E_A(n,d))) &\cong H^0(I \otimes (\sum L_\alpha) \otimes E_A(n'', d'')) \\ &\cong I \otimes \sum H^0(L_\alpha \otimes E_A(n'', d'')) \end{aligned}$$

$L_\alpha \otimes E_A(n'', d'')$ é um fibrado indecomponível com grau negativo, logo não tem secções (lema 26). Assim $H^0(Hom(F, E_A(n,d))) = 0$, absurdo pois contradiz a existência da aplicação $F \hookrightarrow E_A(n,d)$.

Logo $E_A(n,d)$ é semiestável. ■

Teorema 8 *Todo o fibrado indecomponível sobre uma curva elíptica é semiestável, e é estável sse a sua dimensão e o seu grau são primos entre si.*

Dem. *Um fibrado vectorial E indecomponível de dimensão n e grau d pode ser escrito na forma*

$$E \cong E_A(n,d) \otimes L$$

para algum fibrado linha com grau zero (teorema 3). A propriedade de ser estável ou de ser semiestável não se altera por se tensorizar com um fibrado linha

$\Longleftarrow$ *Se $(n,d) = 1$, a estabilidade é equivalente à semiestabilidade, logo o resultado segue do lema 27.*

$\Longrightarrow$ *Se $h = (n,d) > 1$, seja $n = n'h$ e $d = d'h$. Temos a sucessão exacta*

$$0 \to 1 \to F_h \to F_{h-1} \to 0$$

tensorizando com $E_A(n', d')$ obtém-se

$$0 \to E_A(n', d') \to E_A(n', d') \otimes F_h \to E_A(n', d') \otimes F_{h-1} \to 0$$

pelo lema 20(II) tem-se

$$0 \to E_A(n', d') \to E_A(n'h, d'h) \to E_A(n'(h-1), d'(h-1)) \to 0$$

que é igual a

$$0 \to E_A(n', d') \to E_A(n, d) \to E_A(n - n', d - d') \to 0.$$

Então $E_A(n', d')$ *é um subfibrado próprio de* $E_A(n, d)$ *com o mesmo declive, logo* $E_A(n, d)$ *não é estável.* ∎

I.4-Espaço Moduli de Fibrados Semiestáveis

Nesta secção queremos identificar o espaço moduli de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis com dimensão n e grau d sobre uma curva elíptica C (uma curva de género 1), $\tilde{M}_{n,d}(C)$, com o produto simétrico da curva e o espaço moduli de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis com determinante fixo com um espaço projectivo. Para isso vamos decompor os fibrados em componentes irredutíveis e usando o resultado da secção anterior, vamos escrevê-las a partir do fibrado de Atiyah construido em I.2.

Pode-se identificar a curva elíptica C com a sua variedade de Picard, J_1, usando o seguinte isomorfismo canónico, que é um caso particular da aplicação Abel-Jacobi

$$\begin{array}{ccc} C & \to & J_1 \\ p & \longmapsto & [p] \end{array}$$

onde $[p]$ denota o fibrado linha associado.

Para cada fibrado vectorial holomorfo E, sobre uma curva elíptica C, podemos obter um representante da sua classe de S-equivalência usando os fibrados de Atiyah, da seguinte forma:

Teorema 9 *Todo o fibrado semiestável de dimensão n e grau d sobre uma curva elíptica C é equivalente a um fibrado da forma $E_A(n',d')\otimes\sum_{i=1}^{h} M_i$, onde $h=(n,d)$, $n=hn'$, $d=hd'$ e M_i são fibrados linha de grau zero, determinados a menos de multiplicação por um elemento de $T_{n'}$.*

A aplicação $E_A(n',d')\otimes\sum_{i=1}^{h} M_i \to \sum_{i=1}^{h} M_i^{n'}\otimes A$ induz um isomorfismo $\tilde{M}_{n,d}(C)\cong S^hC$.

Dem. *Seja E um fibrado semiestável com declive $\mu=\frac{d}{n}$. Seja $0=V_0\subset V_1\subset V_2\subset ...\subset V_m=E$ uma filtração de Jordan-Hölder para E, com $E_i=\frac{V_i}{V_{i-1}}$ fibrados estáveis com declive μ. Tem-se $E\sim\sum_{i=1}^{m} E_i$ (fibrado graduado associado a E).*

Do teorema 5 conclui-se que um fibrado estável com declive $\mu=\frac{d'}{n'}$ tem que ter dimensão n' e grau d'. Então cada E_i é estável de dimensão n' e grau d'. Logo vão existir h parcelas directas em $\sum E_i$. Como um fibrado estável é indecomponível, pelo teorema 3, $E_i\cong E_A(n',d')\otimes M_i$ para algum fibrado linha M_i com grau zero definido a menos de multiplicação por um elemento de $T_{n'}$. Então

$$E\sim E_A(n',d')\otimes\sum_{i=1}^{h} M_i.$$

Define-se a aplicação $f:\tilde{M}_{n,d}(C)\to S^hJ_1$ por

$$E_A(n',d')\otimes\sum_{i=1}^{h} M_i\longmapsto\sum_{i=1}^{h} M_i^{n'}\otimes A$$

f é um isomorfismo. Como $S^hJ_1=S^hC$ tem-se $\tilde{M}_{n,d}(C)\cong S^hC$. ■

Observação 5 *Do teorema 5 conclui-se que* $M_{n,d}(C) = \begin{cases} \emptyset & se \quad (n,d) > 1 \\ C & se \quad (n,d) = 1 \end{cases}$

Considere-se a aplicação de Abel-Jacobi

$$\alpha : S^h C \to J_h(C)$$

que associa cada divisor efectivo com grau h ao correspondente fibrado linha.

Teorema 10 *Para qualquer* n, d, *sob os isomorfismos apropriados* $\tilde{M}_{n,d}(C) \cong S^h C$ *e* $J_d(C) \cong J_h(C)$ $(h = (n,d))$, *a aplicação determinante* $\det : \tilde{M}_{n,d}(C) \to J_d(C)$ *pode ser identificada com a aplicação de Abel-Jacobi, i.e., existe um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{n,d}(C) & \cong & S^h C \\ \det \downarrow & & \downarrow \alpha \\ J_d(C) & \cong & J_h(C) \end{array}$$

Dem. *Seja* $E \cong E_A(n', d') \otimes \sum_{i=1}^h M_i \in \tilde{M}_{n,d}(C)$ *e seja* $f : \tilde{M}_{n,d}(C) \to S^h J_1 \cong S^h C$ *o isomorfismo do teorema 6,* $E \longmapsto \sum_{i=1}^h M_i^{n'} \otimes A$. *Como* $\det E_A(n', d') = A^{d'}$,

$$\det E = \det(E_A(n', d') \otimes \sum_{i=1}^h M_i) \cong (A^{d'})^h \otimes (\prod_{i=1}^h M_i)^{n'} \cong A^d \otimes (\prod_{i=1}^h M_i)^{n'}$$

Então $(\det E) \otimes A^{-d+h} \cong \prod_{i=1}^h ({M_i}^{n'} \otimes A) \cong \alpha \circ f(E)$.
Isto prova a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{n,d}(C) & \overset{f}{\cong} & S^h C \\ \det \downarrow & & \downarrow \alpha \\ J_d(C) & \overset{\otimes A^{-d+h}}{\cong} & J_h(C) \end{array}$$

■

Vamos caracterizar o espaço moduli de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis com determinante fixo.

Definição 12 *Seja* L *um fibrado linha com grau* d *define-se*

$$\tilde{M}_{n,L}(C) = \{e \in \tilde{M}_{n,d}(C) | \quad \forall E \in e, \det E \cong \det L\}.$$

Teorema 11 *Seja* L *um fibrado linha com grau* d *sobre* C. *Então* $\tilde{M}_{n,L}(C) \cong \mathbb{P}^{h-1}$, *com* $h = (n,d)$.

Dem. *A fibra da aplicação de Abel-Jacobi* $\alpha : S^h C \to J_h(C)$ *é o espaço projectivo* $\mathbb{P}^{h-1}$*[GH]. Como a aplicação determinante* $\det : M_{n,d}(C) \to J_d(C)$ *pode ser identificada com a aplicação de Abel-Jacobi, teorema 7, e como* $\tilde{M}_{n,L}(C)$ *é uma fibra de* $\det$, *temos* $\tilde{M}_{n,L}(C) \cong \mathbb{P}^{h-1}$. ■

I.5-Teoria de Brill-Noether para fibrados vectoriais sobre uma curva elíptica C

Nesta secção vamos definir os espaços de Brill-Noether para fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis sobre uma curva elíptica (curva de género 1) C, ou seja, os espaços das classes de S-equivalência de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis sobre C que têm um certo número ou mais de secções holomorfas linearmente independentes. O caso mais interessante vai ser o caso em que temos grau igual a zero e para estudar este caso vamos decompor os nossos fibrados usando os fibrados F_n, fibrados vectoriais holomorfos indecomponíveis sobre C de dimensão n e grau zero que têm secções, cuja existência foi provada na secção I.2.

Lema 28 *Se E é um fibrado semiestável com grau $d > 0$ sobre uma curva elíptica, então $h^0(E) = d$. Em particular, E é não especial.*

Dem. *Seja K o fibrado canónico sobre a curva que neste caso, como a curva é elíptica, vai ser trivial. Pela Dualidade de Serre tem-se $h^1(E) = h^0(E^*)$. E^* é semiestável com grau $-d < 0$, logo não vai ter secções, i.e., $h^0(E^*) = 0 \Longrightarrow h^1(E) = 0$, i.e., E não é especial. Então pelo teorema de Riemann-Roch $h^0(E) = \deg E = d$.*
■

Uma consequência imediata deste lema é que se $d > 0$, então quaisquer dois fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis S-equivalentes de grau d têm espaço de secções isomorfos. Então para $d > 0$, h^0 é uma função bem definida no espaço $\tilde{M}_{n,d}$ (escreve-se em vez de $\tilde{M}_{n,d}(C)$ quando está implícita a curva que se está a usar).

Definição 13 *Para $d > 0$, define-se o espaço $\tilde{W}^{k-1}_{n,d}(C) = \{E \in \tilde{M}_{n,d}(C) | \quad h^0(E) \geq k\ \}$, a que se chama espaço de Brill-Noether para fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis.*

Conclui-se facilmente que:

Proposição 6 *Para $d > 0$,* $\tilde{W}^{k-1}_{n,d}(C) = \begin{cases} \tilde{M}_{n,d}(C) & se \quad d \geq k \\ \emptyset & se \quad 1 \leq d \leq k-1 \end{cases}$

Portanto os casos de interesse vão ser aqueles em que $d = 0$. Para $n = 1$ o resultado é imediato.

Proposição 7 *No caso dos fibrados linha de grau zero,*

$$\tilde{W}^{k-1}_{1,0}(C) = \begin{cases} I & se \quad k-1 = 0 \\ \emptyset & se \quad k-1 \geq 1 \end{cases}$$

Sejam $n > 1$, $d = 0$.

Neste caso não existem fibrados estáveis em $\tilde{M}_{n,0}$ (teorema 5). Mais, também podem existir fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis S-equivalentes que não têm os seus espaços de secções isomorfos.

Exemplo 1 *F_2 e I_2 são S-equivalentes mas $h^0(F_2) = 1$ e $h^0(I_2) = 2$.*

Então para este caso a aplicação h^0 não está bem definida no espaço $\tilde{M}_{n,d}(C)$, como se vê no exemplo anterior. Vamos, assim, definir dois novos espaços de Brill-Noether para fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis de grau zero.

Definição 14 *Definem-se os seguintes espaços*

$$W_{n,0}^{k-1}(\forall) = \{e \in \tilde{M}_{n,0} | \quad \forall E \in e, h^0(E) \geq k\}$$

e

$$W_{n,0}^{k-1}(\exists) = \{e \in \tilde{M}_{n,0} | \quad \exists E \in e : h^0(E) \geq k\}$$

Trivialmente, $W_{n,0}^{k-1}(\forall) \subset W_{n,0}^{k-1}(\exists)$.

Vamos identificar estes espaços.

Lema 29 *Seja E um fibrado semiestável com grau zero sobre uma curva elíptica. Então:*

(I) Se $h^0(E) = 0$ então para qualquer $E' \sim E$ tem-se $h^0(E') = 0$.

(II) Se $h^0(E) \neq 0$ então existe E' tal que $E' \sim E$ e $h^0(E') = 1$.

Dem. *$E = \sum E_i$, decomposição em factores indecomponíveis. Pelo teorema 1, $E_i \cong L_i \otimes F_{h_i}$, onde L_i é um fibrado linha com grau zero e $h_i = rkE_i$. Então $E \cong \sum(L_i \otimes F_{h_i})$.*

(I) Se $h^0(E) = 0$ tem-se $h^0(\sum(L_i \otimes F_{h_i})) = 0$ e então para qualquer i, $h^0(L_i \otimes F_{h_i}) = 0$. Assim nenhum dos L_i pode ser trivial.

Os factores de Jordan-Hölder de F_{h_i} são todos isomorfos ao fibrado linha trivial. Então os factores de Jordan-Hölder de E são os L_i's, cada um repetido h_i vezes. Como L_i não é trivial, tem-se $h^0(L_i) = 0$ para todo o i.

Qualquer fibrado E' equivalente a E tem os mesmos factores de Jordan-Hölder que E. Pensando na sucessão de cohomologia associada à filtração de Jordan-Hölder de E', $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_m = E'$

$$0 \to V_{m-1} \to E' \to L_j = \frac{E'}{V_{m-1}} \to 0$$

$$0 \to H^0(V_{m-1}) \to H^0(E') \to \underbrace{H^0(L_j)}_{=0} \to ...$$

Então $h^0(V_{m-1}) = h^0(E')$

$$0 \to V_{m-2} \to V_{m-1} \to L_k \to 0$$

Pelo mesmo raciocínio tem-se $h^0(V_{m-2}) = h^0(V_{m-1})$

Iterando o processo chegamos que $h^0(E') = h^0(L_r) = 0$ para algum r.

(II) Se $h^0(E) \neq 0$ então $h^0(\sum(L_i \otimes F_{h_i})) \neq 0$ e assim existe um k tal que $h^0(L_k \otimes F_{h_k}) \neq 0$. Para este k tem-se $h^0(L_k) \neq 0$, logo L_k é o fibrado linha trivial. $E \sim \sum L_i$ com cada L_i repetido h_i vezes. Juntando as parcelas que são fibrados linha triviais escreve-se E na forma $E \sim I_r \oplus G$, com $h^0(G) = 0$. Mas $I_r \cong F_r$, então $E \sim F_r \oplus G$. Logo $h^0(F_r \oplus G) = h^0(F_r) + h^0(G) = 1 + 0 = 1$. ■

Lema 30 *Seja E um fibrado semiestável com grau zero sobre uma curva elíptica C. Entre os fibrados S-equivalentes a E, a soma directa de fibrados linha é a que tem mais secções.*

Dem. *$E \cong \sum E_i$, decomposição de E na soma directa de fibrados indecomponíveis. Agrupando as parcelas com secções escreve-se E na forma,*

$$E \cong F_{h_1} \oplus ... \oplus F_{h_r} \oplus G, \text{ com } h^0(G) = 0.$$

Então $h^0(E) = r$.

Se $k = \sum_{i=1}^{s} h_i$ então $E \sim I_k \oplus \sum M_i$, onde M_i são fibrados linha não triviais em C.

$$h^0(I_k \oplus \sum M_i) = k \geq h^0(E) = r$$

Se $E' \sim E$ então $E' \sim I_k \oplus \sum M_i$. Usando o mesmo argumento conclui-se que $k \geq h^0(E')$. ■

Podemos então caracterizar os espaços $W^{k-1}_{n,0}(\forall)$ e $W^{k-1}_{n,0}(\exists)$.

Teorema 12 *Para fibrados semiestáveis de dimensão $n > 1$ e grau zero sobre uma curva elíptica C tem-se*

$$W^{k-1}_{n,0}(\forall) \cong \begin{cases} \emptyset & se \quad k-1 \geq 1 \\ S^{n-1}C & se \quad k-1 = 0 \end{cases}$$

e

$$W^{k-1}_{n,0}(\exists) \cong S^{n-k}C.$$

Dem. *Pelo lema 29(II) se todos os representantes de uma classe de equivalência $e \in \tilde{M}_{n,0}$ têm que ter pelo menos duas secções linearmente independentes tem-se $W^{k-1}_{n,0}(\forall) = \emptyset$ para $k - 1 \geq 1$ pois pelo lema existe um representante $E \in e$ que satisfaz $h^0(E) = 1$.*

Se $k - 1 = 0$, pelo lema 29(I) dado $e \in \tilde{M}_{n,0}$, um fibrado semiestável $E \in e$ tem $h^0(E) \geq 1$ sse qualquer $E' \in e$ tem $h^0(E') \geq 1$. Vamos olhar para o representante de e que é uma soma directa de fibrados linha, $\sum_{i=1}^{n} M_i \in e$, este fibrado tem uma secção não nula sse pelo menos um dos M_i é trivial, as outras $n - 1$ parcelas são arbitrárias. Assim $W^0_{n,0}(\forall) \cong S^{n-1}C$.

Pelo lema 30, $e \in W^{k-1}_{n,0}(\exists)$ sse a soma directa de fibrados linha $\sum M_i \in e$ tem pelo menos k secções independentes. Isto quer dizer que k dos termos em $\sum M_i$ são isomorfos ao fibrado linha trivial e os outros podem ser quaisquer, logo $W^{k-1}_{n,0}(\exists) \cong S^{n-k}C$. ■

Definem-se espaços análogos aos anteriores mas com determinante fixo.

Definição 15 *Analogamente definem-se para L fibrado linha com grau 0 os espaços*

$$W^{k-1}_{n,L}(\forall) = \{e \in \tilde{M}_{n,L} | \quad \forall E \in e, h^0(E) \geq k\}$$

e

$$W^{k-1}_{n,L}(\exists) = \{e \in \tilde{M}_{n,L} | \quad \exists E \in e : h^0(E) \geq k\}$$

Teorema 13 *Seja L um fibrado linha com grau zero sobre uma curva elíptica C. Para $n > 1$,*

$$W_{n,L}^{k-1}(\forall) \cong \begin{cases} \emptyset & se \quad k-1 \geq 1 \\ \mathbb{P}^{n-2} & se \quad k-1 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_{n,L}^{k-1}(\exists) \cong \mathbb{P}^{n-k-1}.$$

Dem. *Se $e \in W_{n,L}^{k-1}(\forall)$ com $k-1 \geq 1$, pelo lema 29(II) existe $E \in e$ tal que $h^0(E) = 1$. Logo $W_{n,L}^{k-1}(\forall) = \emptyset$ para $k-1 \geq 1$.*

Se $k-1 = 0$:

$W_{n,L}^{0}(\forall)$ é a fibra da aplicação $\det : W_{n,0}^{0}(\forall) \to J_0(C)$. Pelo mesmo argumento usado no teorema 7, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_{n,0}^{0}(\forall) & \cong & S^{n-1}C \\ {\scriptstyle \det}\downarrow & & \downarrow_{\alpha} \\ J_0(C) & \cong & J_{n-1}(C) \end{array}$$

é comutativo. Então $W_{n,L}^{0}(\forall) \cong$ fibra de $\alpha \cong \mathbb{P}^{n-2}$

Da mesma maneira tem-se o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W_{n,0}^{k-1}(\exists) & \cong & S^{n-k}C \\ {\scriptstyle \det}\downarrow & & \downarrow_{\alpha} \\ J_0(C) & \cong & J_{n-k}(C) \end{array}$$

de onde se obtém que

$$W_{n,L}^{k-1}(\exists) \cong \text{fibra de } \det \cong \text{fibra de } \alpha \cong \mathbb{P}^{n-k-1}.$$

■

Parte II

Nesta segunda parte vamos trabalhar sobre uma curva algébrica projectiva C de género maior ou igual 2. O objectivo vai ser estudar os espaços de Brill-Noether para fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis ou estáveis, isto é, os conjuntos de fibrados vectoriais holomorfos semiestáveis ou estáveis que têm um certo número ou mais de secções linearmente independentes. Começamos por construir estes espaços para o caso em que a dimensão e o grau são primos entre si, o caso em que não são primos entre si generaliza-se a partir deste usando a teoria dos invariantes geométricos de Mumford que não vamos abordar neste trabalho. Vamos pois supôr que construímos os espaços para qualquer dimensão e para qualquer grau, depois de os termos construído para o caso de dimensão e grau primos entre si.

A seguir caracterizamos os seus espaços tangente, definimos a chamada zona de Brill-Noether e por último vamos ver alguns casos em que os espaços de Brill-Noether são vazios.

II.1-Construção dos espaços $W^{k-1}_{n,d}(C)$ para n e d coprimos

Deduzem-se do teorema de Riemann-Roch e da Dualidade de Serre as seguintes propriedades:

Proposição 8 *(I) Seja E um fibrado semiestável com $\mu(E) \geq 2g-1$ e dimensão n, então $h^1(E) = 0$. (E é não especial).*

(II) Seja E um fibrado semiestável com $\mu(E) \geq 2g$ e dimensão n, então E é gerado pelas suas secções.

Dem. *(I)* $\deg K = 2g-2$ *e* $rk(K) = 1$. *Assim* $\deg(K \otimes E^*) = (2g-2)n - d$.

$$\mu(E) = \frac{d}{n} \geq 2g-1 \Rightarrow d > n(2g-2)$$

Logo $\deg(K \otimes E^*) < 0$ *e então* $H^0(K \otimes E^*) = 0$. *Pela Dualidade de Serre tem-se* $H^1(E) = 0$.

(II) Se $\mu(E) \geq 2g$ então $\mu(E \otimes \mathcal{O}(-x)) = \mu(E) - 1 \geq 2g-1$ para cada $x \in C$ e assim por (I) tem-se $H^1(E \otimes \mathcal{O}(-x)) = 0$.

Considere-se a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^0(E) & \rightarrow & E_x \\ s & \longmapsto & s(x) \end{array},$$

vamos ver que ela é sobrejectiva. Temos a sucessão exacta

$$0 \to E \otimes \mathcal{O}(-x) \to E \to E_x \to 0$$

e a sucessão exacta longa de cohomologia associada

$$0 \to H^0(E \otimes \mathcal{O}(-x)) \to H^0(E) \to H^0(E_x) \to \underbrace{H^1(E \otimes \mathcal{O}(-x))}_{=0} \to 0$$

Logo a aplicação é sobrejectiva.

Daqui obtém-se o resultado. ■

Seja $E \in M_{n,d}(C)$. Fixemos n, d e D um divisor efectivo com grau $\delta \gg 0$. Temos a sucessão exacta

$$0 \to E \to E \otimes \mathcal{O}(D) \to E_{|D} \to 0$$

e a sucessão exacta longa de cohomologia associada

$$0 \to H^0(E) \to H^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\varphi} H^0(E_{|D}) \to H^1(E) \to 0$$

Tem-se $H^1(E \otimes \mathcal{O}(D)) = 0$, pois:

$\mu(E \otimes \mathcal{O}(D)) = \frac{d+n\delta}{n} = \frac{d}{n} + \delta \geq 2g - 1$, para δ suficientemente grande. Então pela proposição anterior $H^1(E \otimes \mathcal{O}(D)) = 0$.

Lema 31 $h^0(E) \geq k$ *sse* $rank(\varphi) \leq d + n\delta - n(g-1) - k$.

Dem.

$$\begin{aligned} rank(\varphi) &= h^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) - \dim(\ker \varphi) \\ &= h^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) - h^0(E) \\ &\leq h^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) - k \end{aligned}$$

Como $h^1(E \otimes \mathcal{O}(D)) = 0$ *pelo teorema de Riemann-Roch temos*

$$h^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) = d + n\delta - n(g-1).$$

Logo $rank(\varphi) \leq d + n\delta - n(g-1) - k$. ■

Daqui em diante vamos fixar um divisor efectivo D em C com grau suficientemente grande tal que $H^1(E \otimes \mathcal{O}(D)) = 0$.

Definição 16 *Define-se família de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d parametrizada por um espaço analítico S como sendo um fibrado vectorial de dimensão n sobre $C \times S$, tal que para cada $s \in S$ se restringe a um fibrado vectorial de dimensão n e grau d sobre $C \times \{s\}$.*

Duas famílias $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}'$ de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d sobre C parametrizadas por S dizem-se equivalentes se existe um fibrado vectorial R sobre S tal que $\mathfrak{F}' \cong \mathfrak{F} \otimes \alpha^* R$, onde α é a projecção de $C \times S$ para S.

Existe uma família importante para o que se vai seguir a que se dá o nome de fibrado de Poincaré e denota-se por $\mathfrak{P}$. É uma família de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d parametrizada por $M_{n,d}(C)$, isto é, um fibrado vectorial de dimensão n sobre $C \times M_{n,d}(C)$, tal que para cada $E \in M_{n,d}(C)$, $\mathfrak{P}$ se vai restringir a E em $C \times \{E\}$. O fibrado de Poincaré goza ainda da seguinte propriedade universal:

Proposição 9 *Seja $\mathfrak{P}$ um fibrado de Poincaré de dimensão n e grau d. Seja S um espaço analítico, e $\mathfrak{E}$ um fibrado vectorial de dimensão n sobre $C \times S$ tal que para cada $s \in S$, $\mathfrak{E}_{|C \times \{s\}}$ tem grau d. Então existe uma única aplicação $f : S \to M_{n,d}(C)$ que a cada s faz corresponder $\mathfrak{E}_{|C \times \{s\}}$, tal que $(1_C \times f)^*(\mathfrak{P}) \cong \mathfrak{E} \otimes \alpha^* R$, onde R é um fibrado vectorial de dimensão n sobre S e α a projecção de $C \times S$ sobre S.*

Sabe-se que o fibrado de Poincaré existe no caso em que n e d são primos entre si, ver [LP]. Portanto vamos considerar n e d coprimos.

Temos as projecções $p : C \times M_{n,d} \to C$ e $\nu : C \times M_{n,d} \to M_{n,d}$. Considere-se $\Gamma = D \times M_{n,d} \subset C \times M_{n,d}$ e seja $\mathfrak{P}$ o fibrado de Poincaré sobre $M_{n,d} \times C$.

Considere-se a sucessão exacta de feixes sobre $C \times M_{n,d}$

$$0 \to \mathfrak{P} \to \mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D) \to \mathfrak{P}_{|\Gamma} \to 0$$

e a sucessão exacta longa de feixes sobre $M_{n,d}$ das imagens directas associadas a ν

$$0 \to \nu_*\mathfrak{P} \to \nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\phi} \nu_*(\mathfrak{P}_{|\Gamma}) \to R^1\nu_*\mathfrak{P} \underset{(*)}{\to} 0$$

Do teorema de Grauert [H], tira-se que

$$\nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D))_E \cong H^0(\mathfrak{P}_E \otimes \mathcal{O}(D)),$$

$$\nu_*(\mathfrak{P}_{|\Gamma})_E \cong H^0(\mathfrak{P}_{E|D})$$

e

$$R^1\nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D))_E \cong H^1(E \otimes \mathcal{O}(D))$$

para cada $E \in M_{n,d}$. Deste último isomorfismo sai, como $H^1(E \otimes \mathcal{O}(D)) = 0$, $R^1\nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)) = 0$ e por isso tem-se (*).

Seja agora S um espaço analítico qualquer e seja $\mathfrak{E}$ uma família de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d sobre C parametrizada por S. Sejam $\theta : C \times S \to S$ e $\pi : C \times S \to C$ projecções e $\Gamma' = D \times S$. Como antes temos a sucessão exacta

$$0 \to \theta_*\mathfrak{E} \to \theta_*(\mathfrak{E} \otimes \pi^*\mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\phi'} \theta_*(\mathfrak{E}_{|\Gamma'}) \to R^1\theta_*\mathfrak{E} \to 0.$$

Pela propriedade universal dos fibrados de Poincaré, existe uma única aplicação $f : S \to M_{n,d}(C)$ e um único fibrado vectorial E em S tal que $(id_C \times f)^*\mathfrak{P} \cong \mathfrak{E} \otimes \theta^* E$.

Lema 32 *Existem isomorfismos canónicos entre o núcleo e o conúcleo da aplicação*

$$f^*(\phi) : f^*(\nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D))) \to f^*(\nu_*(\mathfrak{P}))$$

e $\theta_*\mathfrak{E} \otimes E$, $R^1\theta_*\mathfrak{E} \otimes E$, *respectivamente. Em particular* $R^1\theta_*\mathfrak{E} \otimes E \cong f^*(R^1\nu_*\mathfrak{P})$.

Dem. *Ver [ACGH] página 178.* ■

No caso em que S é um único ponto s, $\mathfrak{E}$ é um fibrado vectorial de grau d e dimensão n sobre $C \times \{s\}$, f aplica s ao correspondente fibrado $\mathfrak{E}_{|C \times \{s\}}$, considerado como fibrado vectorial sobre C, em $M_{n,d}(C)$. Neste caso tem-se pelo lema anterior que ϕ_E coincide com φ.

Assim,

$$\begin{aligned} \dim \nu_*(\mathfrak{P}_E \otimes p^*\mathcal{O}(D)) &= \dim H^0(\mathfrak{P}_E \otimes \mathcal{O}(D)) \\ &= \dim H^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) \\ &= d + n\delta - n(g-1) \end{aligned}$$

e

$$\dim \nu_*(\mathfrak{P}_{|\Gamma})_E = \dim H^0(\mathfrak{P}_{E|D}) = \dim H^0(E_{|D}) \underset{(*)}{=} n\delta.$$

$$\begin{gathered}(*) h^0(E) - h^0(E \otimes \mathcal{O}(D)) + h^0(E_{|D}) - h^1(E) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d - n(g-1) - d - n\delta + n(g-1) + h^0(E_{|D}) = 0 \\ \Leftrightarrow h^0(E_{|D}) = n\delta.\end{gathered}$$

Definição 17 *Define-se $W^{k-1}_{n,d}(C)$ como sendo a variedade determinantal de ordem $(n\delta - k + d - n(g-1))$, a que se chama espaço de Brill-Noether para fibrados vectoriais holomorfos estáveis.*

Viu-se que $h^0(E) \geq k$ sse $rank(\varphi) \leq d + n\delta - n(g-1) - k$. Então

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(W^{k-1}_{n,d}(C)) &= \{E \in M_{n,d}(C) | rank(\varphi) \leq d + n\delta - n(g-1) - k\} \\ &= \{E \in M_{n,d}(C) | h^0(E) \geq k\}.\end{aligned}$$

Usando resultados sobre variedades determinantais ([ACGH], cap.II), concluímos que se $W^{k-1}_{n,d}(C) \neq \emptyset$ então tem codimensão

$$\begin{aligned}&\leq [d + n\delta - n(g-1) - d - n\delta + n(g-1) + k].[n\delta - d - n\delta + n(g-1) + k] \\ &= k(k - d + n(g-1)).\end{aligned}$$

Qualquer componente irredutível de $W^{k-1}_{n,d}(C)$ vai ter, assim, dimensão

$$\geq n^2(g-1) + 1 - k(k - d + n(g-1))$$

Definição 18 *Como este último número é importante define-se o número de Brill-Noether como sendo*

$$\rho(g, n, d, k-1) := n^2(g-1) + 1 - k(k - d + n(g-1))$$

em que se supõe que $k \geq d - n(g-1)$.

II.2-Espaço Tangente de Zariski de $W^{k-1}_{n,d}(C)$

Seja $G(k,V)$ a grassmaniana de subespaços vectoriais de dimensão k do espaço vectorial V.

Em analogia com o caso clássico dos fibrados linha [ACGH], definimos o seguinte conjunto:

Definição 19 $G^{k-1}_{n,d}(C) = \{(E,V) | \quad E \in M_{n,d}(C), V \in G(k, H^0(E))\}$

Observação 6 *$G^{k-1}_{n,d}(C)$ pode ser visto como uma subvariedade da Grassmaniana $G(k, \nu_*(\varepsilon \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$ sobre $M_{n,d}(C)$.*

Vamos escrever $G^{k-1}_{n,d}$ em vez de $G^{k-1}_{n,d}(C)$ quando não for importante mencionar a curva C.

Definição 20 *Diz-se que o par (E,V), onde $E \in M_{n,d}(C)$ e $V \subset H^0(E)$, é um $g^{k-1}_{n,d}$ se $(E,V) \in G^{k-1}_{n,d}(C)$.*

Da mesma forma que se definiu o conceito de família de fibrados vectoriais parametrizada por um espaço analítico, vamos agora definir famílias de $g^{k-1}_{n,d}$'s também parametrizadas por um espaço analítico qualquer, e vamos ver que também neste caso existem fibrados de Poincaré caracterizados por uma propriedade universal.

Definição 21 *Seja S um espaço analítico. Uma família de $g^{k-1}_{n,d}$'s sobre C parametrizada por S consiste em:*

(I) Numa família E de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d sobre C parametrizada por S.

(II) Num subfeixe localmente livre F de dimensão k e grau d de α_*E, onde α é a projecção de $C \times S \to S$, com a propriedade que para cada $s \in S$, o homomorfismo

$$F \otimes k(s) \to H^0(\alpha^{-1}(s), E \otimes \mathcal{O}_{\alpha^{-1}(s)})$$

é injectivo, onde $k(s) = \frac{\mathcal{O}_s}{m_s}$ é o corpo residual em $s \in S$.

Observação 7 *A propriedade (II) é equivalente a ter que se $E \otimes \alpha^*R = (id_C \times f)^*(\mathfrak{P})$, onde $\mathfrak{P}$ é o fibrado de Poincaré e $f : S \to M_{n,d}(C)$, então $F \otimes R$ é um subfibrado vectorial de $f^*(\nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$ (ver lema 2).*

Tal como $M_{n,d}(C)$ parametriza uma família universal de fibrados vectoriais de dimensão n e grau d, vamos agora definir a família universal de $g^{k-1}_{n,d}$'s que é parametrizada por $G^{k-1}_{n,d}(C)$.

Definição 22 *Duas famílias (E,F) e (E',F') de $g^{k-1}_{n,d}$'s sobre C parametrizadas por um espaço analítico S dizem-se equivalentes se existe um fibrado vectorial R de dimensão n e grau d sobre S e um isomorfismo tal que $E' \cong E \otimes \alpha^*R$ e F' pode ser identificado com $F \otimes R$ através do isomorfismo.*

Definição 23 *Seja* $c : G^{k-1}_{n,d}(C) \to M_{n,d}(C)$ *a restricção da projecção de* $G(k, \nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$ *sobre* $M_{n,d}(C)$*. A família universal de* $g^{k-1}_{n,d}$*'s sobre* C *parametrizada por* $G^{k-1}_{n,d}(C)$ *é* $(c^*(\mathfrak{P}), \mathfrak{F})$ *onde* ε *é o fibrado de Poincaré e* $\mathfrak{F}$ *é a restricção a* $G^{k-1}_{n,d}(C)$ *do subfibrado universal de* $G(k, \nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$*.*

A existência desta família universal mostra que $G^{k-1}_{n,d}(C)$ tem a propriedade universal seguinte:

Teorema 14 *Para qualquer espaço analítico* S *e qualquer família* $\mathfrak{G}$ *de* $g^{k-1}_{n,d}$*'s sobre* C *parametrizada por* S*, existe um único morfismo* f *de* S *para* $G^{k-1}_{n,d}(C)$ *tal que o pull-back por* $id_C \times f$ *da família universal parametrizada por* $G^{k-1}_{n,d}(C)$ *é equivalente a* $\mathfrak{G}$*.*

Dem. *Seja* $G = (E, F)$*. Pela propriedade universal do fibrado de Poincaré, existe um único morfismo* $f : S \to M_{n,d}(C)$ *e um fibrado vectorial* R *de dimensão* n *e grau* d *em* S *tal que, denotando por* $\alpha : C \times S \to S$ *a projecção, tem-se* $E \otimes \alpha^* R = (id_C \times f)^*(P)$*. Já se viu que* $F \otimes R$ *pode ser visto como um subfibrado de* $f^*(\nu_*(P \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$ *contido em* $E \otimes \alpha^* R \cong \ker(f^*(\phi))$ $(\phi : \nu_*(P \otimes p^*\mathcal{O}(D)) \to \nu_*(P_{|\Gamma}))$*.(ver obs.2)*

Pela propriedade universal do subfibrado universal da Grassmaniana, $F \otimes R$ *é o pull-back deste via uma única secção de* $G(k, f^*(\nu_*(P \otimes p^*\mathcal{O}(D)))) = G(k, \nu_*(P \otimes p^*\mathcal{O}(D))) \times_{M_{n,d}} S$ *sobre* S*. Esta secção corresponde a um único morfismo de espaços analíticos sobre* $M_{n,d}(C)$

$$S \to G(k, \nu_*(\mathfrak{P} \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$$

que se factoriza através da inclusão $G^{k-1}_{n,d}(C) \subset G(k, \nu_*(P \otimes p^*\mathcal{O}(D)))$*, pois* $F \otimes R$ *é anulado por* $f^*(\phi)$*.* ■

Seja $\omega \in G^{k-1}_{n,d}(C)$, este vai corresponder a ter um fibrado vectorial E de dimensão n e grau d sobre C, mais um subespaço de dimensão k, W, de $H^0(E)$. Sabe-se que

$$T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C)) = Hom(Spec(\mathbb{C}[\varepsilon]), (G^{k-1}_{n,d}(C), \omega))$$

onde $\mathbb{C}[\varepsilon] = \frac{\mathbb{C}[T]}{(T^2)}$, o anel dos números duais. $T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C))$ é o conjunto dos morfismos de espaços analíticos entre $Spec(\mathbb{C}[\varepsilon])$ e $G^{k-1}_{n,d}(C)$, que envia o único ponto de $Spec(\mathbb{C}[\varepsilon])$ para ω.

Do teorema sai que $T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C))$ é o conjunto das classes de equivalência de famílias de $g^{k-1}_{n,d}$'s sobre C parametrizadas por $Spec(\mathbb{C}[\varepsilon])$ que se restringem a (E, W) em C. A tais famílias chamam-se deformações de primeira ordem de (E, W).

Tem-se a sucessão exacta

$$0 \to T_\omega(c^{-1}(E)) \to T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C)) \xrightarrow{c_*} T_E(M_{n,d}(C)),$$

onde $c^{-1}(E) = G(k, H^0(E))$. Então $\ker c_* = T_\omega(c^{-1}(E)) = T_W(G(k, H^0(E))) = Hom(W, \frac{H^0(E)}{W})$.

Vamos agora caracterizar as deformações de primeira ordem de (E, W), em termos do espaço tangente de $M_{n,d}(C)$ em E, que é isomorfo a $H^1(EndE)$. Descrevemos os elementos destes espaços de cohomologia como cocadeias de Čech, verificando certas relações de cociclo, como descrito em [Gu]. Supondo que E tem $\{g_{ij}\}, \{U_i\}$ como funções de transição e cobertura, respectivamente, seja E' uma deformação de primeira ordem de E. Tal deformação corresponderá a um fibrado vectorial com funções de transição dadas por:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij}(1 + \varepsilon\phi_{ij})$$

Para os $\tilde{g}_{ij}$ satisfazerem a equação de cociclo tem-se necessariamente que $g_{kj}\phi_{ij}g_{jk} + \phi_{jk} = \phi_{ik}$. E portanto ϕ_{ij} representam um elemento de $H^1(EndE)$.

Uma secção holomorfa $s \in H^0(E)$ é dada por uma colecção $\{s_i\}$ de funções, com $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_C)$ tal que $s_i = g_{ij}s_j$ em $U_i \cap U_j$. Uma extensão de s a uma secção de E' é dada localmente por $\tilde{s}_i = s_i + \varepsilon s'_i$, onde $\tilde{s}_i$ é uma secção de E' e então $\tilde{s}_i = \tilde{g}_{ij}\tilde{s}_j$. Mas isto é equivalente a que $\phi_{ij}s_j = g_{ji}s'_i - s'_j$ em $U_i \cap U_j$. Assim se definirmos $\psi_{ij} = \phi_{ij}s_j$, ψ_{ij} define um cociclo em $H^1(E)$, que vamos designar por $\phi.s$. Assim obtemos uma aplicação $H^1(EndE) \otimes H^0(E) \to H^1(E)$ que ao par (ϕ, s) associa $\phi.s$. Note-se que $g_{ji}s'_i - s'_j$ é o cobordo $\delta s'$ onde $s' = \{s'_i\}$, com $s'_i \in C^0(\{U_i\}, E)$. $s' = \{s'_i\}$ representa uma secção de E sse $g_{ji}s'_i - s'_j = 0$, isto é, sse $\phi.s = 0$. Portanto $s + \varepsilon s'$ é uma secção da deformação de primeira ordem de E se $\phi.s = 0$.

Concluímos então:

Lema 33 *Dado $E \in M_{n,d}(C)$ e uma secção s de E, o conjunto dos vectores tangentes*

$$\phi \in T_E(M_{n,d}(C)) \cong H^1(EndE)$$

tais que s pode ser estendida a uma secção da correspondente deformação de primeira ordem de E é dado por

$$\{\phi \in H^1(EndE) : \phi.s = 0 \text{ em } H^1(E)\}.$$

Proposição 10 *(I) Qualquer componente de $G^{k-1}_{n,d}(C)$ tem dimensão*

$$\geq \rho(g, n, d, k-1) = n^2(g-1) + 1 - k(k - d + n(g-1))$$

(II) Seja $\omega \in G^{k-1}_{n,d}(C)$, a que corresponde um fibrado vectorial E de dimensão n e grau d e um subespaço W com dimensão k de $H^0(E)$. Então temos a sucessão exacta

$$0 \to Hom(W, \frac{H^0(E)}{W}) \to T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C)) \xrightarrow{c_*} T_E(M_{n,d}(C))$$

onde $\operatorname{Im} c_* =\{\phi \in H^1(EndE) : \phi.W = 0 \text{ em } H^1(E)\}$.

Dualmente $\operatorname{Im} c_* = \operatorname{Im}(\mu_{0,W})^{\perp}$, *onde* $\mu_{0,W} : W \otimes H^0(K \otimes E^*) \to H^0(K \otimes EndE)$ *(morfismo de Petri).*

(III) $\dim T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C)) = \rho(g, n, d, k-1) + \dim(\ker \mu_{0,W})$. *Em particular,* $G^{k-1}_{n,d}(C)$ *é não singular com dimensão ρ em ω sse* $\ker \mu_{0,W} = 0$.

Dem. *(I) Se $k \geq d - n(g-1)$, já foi provado na secção anterior.*

Se $k < d - n(g-1)$, então por Riemann-Roch $h^0(E) \geq d - n(g-1) > k$. Tem-se assim que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} G^{k-1}_{n,d}(C) & \to & M_{n,d}(C) \\ (E, W) & \longmapsto & E \end{array}$$

é sobrejectiva. A fibra sobre um ponto $E \in M_{n,d}(C)$ é $G(k, H^0(E))$.

$$\dim G(k, H^0(E)) = k(h^0(E) - k) \underset{R-R}{\geq} k(d - n(g-1) - k).$$

Então

$$\dim G^{k-1}_{n,d}(C) \geq n^2(g-1) + 1 + k(d - n(g-1) - k) = \rho.$$

(II) Já foi provado com excepção de $\operatorname{Im} c_* = \operatorname{Im}(\mu_{0,W})^{\perp}$. $\mu_{0,W}$ é a restricção a $W \otimes H^0(K \otimes E^*)$ do chamado morfismo de Petri $\mu_0 : H^0(E) \otimes H^0(K \otimes E^*) \to H^0(K \otimes EndE)$ definido pela multiplicação de secções. Consideremos a dualidade de Serre e denotemos por $\langle ., . \rangle$ o par definido pela dualidade então tem-se

$$\phi.W = 0 \Leftrightarrow \langle \phi, \mu_0(s \otimes r) \rangle = \langle \phi.s, r \rangle = 0, \forall s \in W, r \in H^0(K \otimes E^*).$$

(III)

$$\begin{aligned}
\dim T_\omega(G^{k-1}_{n,d}(C)) &= \dim G(k, H^0(E)) + \dim \operatorname{Im} c_* \\
&= k(h^0(E) - k) + n^2(g-1) + 1 - \dim(\operatorname{Im} \mu_{0,W}) \\
&= k(h^0(E) - k) + n^2(g-1) + 1 - kh^0(K \otimes E^*) + \dim(\ker \mu_{0,W}) \\
&= n^2(g-1) + 1 + k(h^0(E) - k - h^0(K \otimes E^*)) + \dim(\ker \mu_{0,W}) \\
&= n^2(g-1) + 1 + k(d - n(g-1) - k) + \dim(\ker \mu_{0,W}) \\
&= \rho + \dim(\ker \mu_{0,W}).
\end{aligned}$$

■

Estamos agora preparados para determinar os espaços tangente a $W^{k-1}_{n,d}(C)$.

Proposição 11 *(I) Seja $E \in W^{k-1}_{n,d}(C) \backslash W^k_{n,d}(C)$ (então por R-R, $k \geq d - n(g-1)$), o espaço tangente a $W^{k-1}_{n,d}(C)$ em E é*

$$T_E(W^{k-1}_{n,d}(C)) = (\operatorname{Im} \mu_0)^{\perp}.$$

Então $W^{k-1}_{n,d}(C)$ é não singular com dimensão ρ em E sse μ_0 é injectiva.

(II) Seja $E \in W^k_{n,d}(C)$, então $T_E(W^k_{n,d}(C)) = T_E(M_{n,d}(C))$. Em particular, se $W^{k-1}_{n,d}(C)$ tem dimensão ρ e $k < d - n(g-1)$ ($\rho < n^2(g-1) + 1$) então E é um ponto singular de $W^{k-1}_{n,d}(C)$.

Dem. *(I) Segue da proposição anterior (II) tendo em conta que a aplicação $c : G^{k-1}_{n,d}(C) \to W^{k-1}_{n,d}(C)$ é birregular fora de $W^k_{n,d}(C)$.*

(II) $W^{k-1}_{n,d}(C)$ é localmente o pull-back via uma aplicação ψ de um aberto de $M_{n,d}(C)$ para a variedade $M(s,m)$ das matrizes $s \times m$, da subvariedade $M_r(s,m)$ das matrizes de dimensão no máximo r. $E \in W^k_{n,d}(C)$ significa que $\psi(E) \in M_{r-1}(s,m)$. Sabe-se que se $A \in M_{r-1}(s,m)$, $T_A(M_r(s,m)) = T_A(M(s,m))$ [ACGH],cap.2. Então

$$T_E(W^{k-1}_{n,d}(C)) = \psi_*^{-1}(T_{\psi(E)}(M_r(s,m))) = \psi_*^{-1}(T_{\psi(E)}(M(s,m))) = T_E(M_{n,d}(C)).$$

■

II.3-A Zona de Brill-Noether

Seja C uma curva de género $g \geq 2$.

Quere-se nesta secção definir uma região onde o problema de Brill-Noether, que consiste em saber para que valores de n (dimensão), d (grau), k (n^{o}de secções) e g os espaços de Brill-Noether, $W^{k-1}_{n,d}(C)$, são não vazios, é não trivial.

Vamos começar por provar uma generalização do teorema de Clifford para fibrados linha.

Teorema 15 (Clifford) *Seja E um fibrado semiestável com dimensão n, grau d e $0 \leq \mu(E) \leq 2g-2$ sobre uma curva. Então*

$$h^0(E) \leq n + \frac{d}{2}.$$

Dem. *Vai-se provar por indução em n.*

Para $n = 1$ o resultado é clássico e está demonstrado em [H], [GH] e outros.

Para $n \geq 2$, por Riemann-Roch, $h^0(E) - h^1(E) = d - n(g-1)$

se $h^0(E) = 0$ é imediato

se $h^1(E) = 0$ então $h^0(E) = d - n(g-1)$. Temos $\frac{d}{n} \leq 2g-2 \Leftrightarrow \frac{d}{2n} \leq g-1$, assim

$$\frac{h^0(E)}{n} = \frac{d}{n} - g + 1 \leq \frac{d}{n} - \frac{d}{2n} = \frac{d}{2n}$$

logo

$$h^0(E) \leq \frac{d}{2} \leq n + \frac{d}{2}.$$

Podemos então assumir que $h^0(E) > 0$ e $h^1(E) > 0$ (E é especial).

Seja E_1 um subfibrado de E com declive maximal e seja $E_2 = \frac{E}{E_1}$. E_1 e E_2 são semiestáveis. Pela semiestabilidade de E tem-se

$$\mu(E_1) \leq \mu(E) \leq 2g-2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq 2g-2$$

e

$$\mu(E_2) \geq 0.$$

Este último porque se $\mu(E_1) \leq \mu(E)$ então $0 \leq \mu(E) \leq \mu(E_2)$ pois

$$\mu(E) \leq \mu(E_2) \Leftrightarrow \frac{d_1 + d_2}{n_1 + n_2} \leq \frac{d_2}{n_2} \Leftrightarrow \frac{d_1}{n_1} \leq \frac{d_1 + d_2}{n_1 + n_2} \Leftrightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E)$$

com $n_i = rk(E_i)$, $d_i = \deg(E_i)$, $i = 1, 2$. Como $h^0(E) > 0$, E tem um subfibrado de grau não negativo e então $\mu(E_1) \geq 0$. Como $h^1(E) > 0$, então $h^0(K \otimes E^*) > 0$ e assim $\mu(K \otimes E_2^*) \geq 0$, logo $\mu(E_2) \leq 2g-2$. Aplicando a hipótese de indução tem-se

$$h^0(E_2) \leq n_2 + \frac{d_2}{2} = n - n_1 + \frac{d_2}{2}$$

e

$$h^0(E_1) \leq n_1 + \frac{d_1}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} h^0(E) &= h^0(E_2)+h^0(E_1) \leq n-n_1+\frac{d_2}{2}+n_1+\frac{d_1}{2} = \\ &= n+\frac{d_1+d_2}{2} = n+\frac{d}{2}. \end{aligned}$$

■

Definem-se os números $\lambda = \frac{k}{n}$ e $\mu = \frac{d}{n}$, os quais vão ser úteis na determinação da zona de Brill-Noether e, em particular, na sua representação gráfica.

Proposição 12 *(I) Se $d < 0$ e $k > 0$, $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$.*

(II) Se $k \leq 0$, $W^{k-1}_{n,d}(C) = M_{n,d}(C)$.

(III) Recta de Riemann-Roch: $\mu = \lambda + g - 1$

(a) Se $\mu \geq \lambda + g - 1$, $W^{k-1}_{n,d}(C) = M_{n,d}(C)$.

(b) Se $\mu > 2g-2$ e $\mu < \lambda + g - 1$, $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$.

(IV) Recta de Clifford: $\mu = 2\lambda - 2$ e $0 \leq \mu \leq 2g-2$.

Se $\mu < 2\lambda - 2$ então $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$.

Dem. *(I) e (II) são triviais.*

(III) (a) $\mu \geq \lambda + g - 1$. Seja $E \in M_{n,d}(C)$,

$$\frac{d}{n} \geq \frac{k}{n} + g - 1 \Leftrightarrow d \geq k + n(g-1) \Leftrightarrow k \leq d - n(g-1) \underset{R-R}{\leq} h^0(E).$$

Logo $h^0(E) \geq k$ e assim $E \in W^{k-1}_{n,d}(C)$.

(b) Seja $E \in W^{k-1}_{n,d}(C)$, $h^0(E) \geq k$.

$$\deg(K \otimes E^*) = (2g-2)n - d < 0$$

porque $\frac{d}{n} > 2g-2 \Leftrightarrow d > n(2g-2)$. Logo $h^1(E) = h^0(K \otimes E^*) = 0$.

Então por Riemann-Roch, $h^0(E) = d - n(g-1) \geq k \Leftrightarrow \frac{d}{n} - (g-1) \geq \frac{k}{n} \Leftrightarrow \mu \geq \lambda + g - 1$. Absurdo! Logo $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$.

(IV)

$$\mu < 2\lambda - 2 \Leftrightarrow \frac{d}{n} < 2\frac{k}{n} - 2 \Leftrightarrow d < 2k - 2n.$$

Seja $E \in W^{k-1}_{n,d}(C)$, então $h^0(E) \geq k$.

$$\frac{d}{2} < k - n \Leftrightarrow k > \frac{d}{2} + n \Rightarrow h^0(E) > \frac{d}{2} + n$$

absurdo, pelo teorema de Clifford.

Logo $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$. ■

Recordemos o número de Brill-Noether $\rho = \rho(g,n,d,k-1) = n^2(g-1) + 1 - k(k-d+n(g-1))$.

Vamos escrever a condição $\rho \geq 1$ nas novas variáveis μ e λ :

$$\begin{aligned}
\rho &\geq 1 \Leftrightarrow n^2(g-1) - k(k-d+n(g-1)) \geq 0 \underset{\textit{dividir} \text{ por } n^2}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow g-1-\frac{k}{n}(\frac{k}{n}-\frac{d}{n}+g-1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow g-1-\lambda(\lambda-\mu+g-1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow g-\lambda(\lambda-\mu+g-1) \geq 1 \Leftrightarrow \rho(g,1,\mu,\lambda-1) \geq 1
\end{aligned}$$

Definição 24 *Define-se* $\tilde{\rho} = \rho(g,1,\mu,\lambda-1)-1$ *e chama-se à curva com equação* $\tilde{\rho} = 0$ *curva de Brill-Noether.*

Esta curva representa a fronteira da região onde se espera que os espaços de Brill-Noether tenham dimensão positiva.

Podemos então construir a seguinte região limitada pelas rectas de Riemann-Roch e de Clifford, pelos eixos positivos e pela recta $\mu = 2g-2$:

Zona de Brill-Noether

A parte interessante é a região pentagonal que está sombreada na figura a que se chama região de Brill-Noether, fora desta região o problema de Brill-Noether é trivial, isto é, os espaços de Brill-Noether ou são vazios ou são iguais ao espaço moduli. Vamos denotar esta região por P.

Pela proposição anterior conclui-se que por baixo e à direita de P, $W^{k-1}_{n,d}(C) = M_{n,d}(C)$ e acima à esquerda de P, $W^{k-1}_{n,d}(C) = \emptyset$. Assim a parte importante a estudar vai ser a zona P.

Simetria de Serre

Se para um ponto de coordenadas $(\mu = \frac{d}{n}, \lambda = \frac{k}{n})$ existe um fibrado estável com dimensão n e grau d possuindo k secções globais independentes, usando o Teorema de Riemann-Roch e a Dualidade de Serre tem-se

$$h^0(K \otimes E^*) = h^0(E) + n(g-1) - d$$

Então $K \otimes E^*$ vai ser um fibrado estável que corresponde ao ponto $(2g-2-\mu, \lambda + g - 1 - \mu)$. Isto vai dar uma simetria em P com eixo de simetria dado pela recta $\mu = g - 1$.

II.4-Alguns espaços de Brill-Noether vazios

Assume-se que o fibrado vectorial E tem dimensão $n \geq 2$ e que se E é estável então $\mu(E) \leq 1$ ou se E é semiestável então $\mu(E) < 1$. Vamos escrever $W^{k-1}_{n,d} = W^{k-1}_{n,d}(C)$, onde C é uma curva algébrica projectiva de género maior ou igual a 2.

Para fibrados vectoriais semiestáveis define-se o conjunto $\tilde{W}^{k-1}_{n,d}(C) = \{E \in \tilde{M}_{n,d}(C) | \ h^0(Gr(E)) \geq k\}$ (onde $Gr(E)$ é o fibrado graduado associado a E definido nos preliminares), a que se pode dar, também, uma estrutura de variedade algébrica. No caso em que n e d são primos entre si este espaço é igual a $W^{k-1}_{n,d}(C)$ cuja construção foi feita na secção II.1, no caso geral usa-se a teoria dos invariantes geométricos de Mumford, que não é abordada neste trabalho, para dar a estrutura de variedade algébrica.

Proposição 13 *Seja E um fibrado estável de grau d, $0 \leq d \leq n$ (ou fibrado semiestável com $0 \leq d < n$) e $h^0(E) \geq k > 0$. Seja V um subfibrado de E gerado por k secções globais independentes de E. Então V é um fibrado trivial de dimensão k.*

Dem. *Temos a sucessão exacta*

$$0 \to V \to E \to F = \frac{E}{V} \to 0$$

Se V não é trivial, então existe $s \in H^0(E)$ tal que $\deg(s) > 0$ *logo* $\deg[s] > 0$ *e* $\mu([s]) \geq 1$. *$[s]$ é um subfibrado de E e $\mu(E) \leq 1$. Absurdo! Então $V \cong I_k$.* ∎

Observação 8 *1) A proposição implica que para qualquer $E \in W^{k-1}_{n,d}$, $0 \leq d \leq n$, E pode ser representado como uma extensão da forma (*) $0 \to I_k \to E \to F = \frac{E}{I_k} \to 0$. Da mesma forma, todo o ponto de $\tilde{W}^{k-1}_{n,d}$, $0 \leq d < n$ tem um representante E que pode ser representado de maneira análoga.*

2) Se $d \geq 0$ e E é estável ou $d > 0$ e E é semiestável então $h^0(E^*) = 0$. Excepto no caso $d = 0$ e E semiestável pode-se assumir que $h^0(F^*) = 0$ na sucessão (*), pois F^* é um subfibrado de E^*.

Teorema 16 *$W^{k-1}_{n,d} = \emptyset$ para $d > 0$, $n > d + (n-k)g$ e para $d = 0$.*

$\tilde{W}^{k-1}_{n,d} = \emptyset$ para $d > 0$, $n > d + (n-k)g$ e para $d = 0$, $k > n$.

Dem. *Todo o ponto de $\tilde{W}^{k-1}_{n,d}$ pode ser representado como um fibrado E da forma*

$$(*) \ 0 \to I_k \to E \to F = \frac{E}{I_k} \to 0$$

Então $\tilde{W}^{k-1}_{n,d} = \emptyset$ se $k > n$ ou $k = n$ e $d > 0$. Se $d = 0$, (*) contradiz a estabilidade de E logo $W^{k-1}_{n,d} = \emptyset$. Supôr $k < n$ e $d > 0$. As extensões do tipo (*) são classificadas pelos elementos do espaço vectorial $H = \bigoplus^k H^1(F^*)$, isto é, os k-uplos $(e_1, ..., e_k)$ com $e_i \in H^1(F^*)$. Duas extensões são isomorfas se os correspondentes pontos estão na mesma órbita da acção de $GL(k)$ em H. Se $e_1, ..., e_k$ são *linearmente independentes, podemos supôr usando esta acção que* $e_k = 0$*, então a extensão tem um splitting parcial que dá* $\mathcal{O}$ *como parcela directa de* E*, o que vai contradizer a estabilidade de* E*, pois um fibrado estável é indecomponível. Como* $h^0(F^*) = 0$ *pelo Teorema de Riemann-Roch tem-se* $h^1(F^*) = d + (n-k)(g-1)$*, então* $e_1, ..., e_k$ *são necessariamente independentes se* $k > d + (n-k)(g-1)$*, isto é, se* $n > d + (n-k)g$*.* ■

Terminamos com um resultado sobre extensões que surge naturalmente como consequência do teorema anterior.

Corolário 7 *Seja* F *um fibrado vectorial fixo de dimensão* $n-k$ *e grau* d *com* $h^0(F^*) = 0$*. Então se* $n \leq d + (n-k)g$*, as extensões* $0 \to I_k \to E \to F = \frac{E}{I_k} \to 0$ *com parcelas não triviais são classificadas a menos de automorfismo de* I_k *por uma variedade de dimensão* $k(d + (n-k)g - n)$*.*

Dem. *As extensões desta forma são classificadas por* $G(k, H^1(F^*))$ *cuja dimensão é igual a*

$$\begin{aligned} k(h^1(F^*) - k) &= k(d + (n-k)(g-1) - k) \\ &= k(d + (n-k)g - n). \end{aligned}$$

■

References

[A] Atiyah, M., *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Society **VII** (1957), 414-52.

[A1] Atiyah, M., *Complex fibre bundles and ruled surfaces*, Proc. London Math. Society **(3) 5** (1955) 407-34.

[AB] Atyiah, M.F.; Bott, R. *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., **A 308**, (1983) 523-615.

[ACGH] Arbarello, E.; Cornalba, M.; Griffiths, P.; Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves, Volume I*, Grundelehren Math. Wiss., **267** Springer-Verlag, New-York, 1984.

[BGN] Brambila-Paz, L.; Grzegorczyk, I.; Newstead, P., *Geography of Brill-Noether loci for small slopes*, J. Algebraic Geometry, **6** (1997), 645-669.

[GH] Griffiths, P.; Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York,1978.

[Gu] Gunning, R., *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*, Princeton Academic Press, 1967.

[H] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[LP] Le Potier, J., *Lectures on Vector Bundles*, Cambridge studies in advanced mathematics **54**, Cambridge University Press 1997.

[Me1] Mercat, V., *Le problème de Brill-Noether pour des fibrés stables de petite pente*, J. reine angew. Math. **56** (1999), 1-41.

[Me2] Mercat, V., *Le problème de Brill-Noether: présentation*, preprint (2000), http://www.bnt.math.jussieu.fr.

[Me3] Mercat, V., *Fibrés stables de pente 2*, preprint (2000), http://www.bnt.math.jussieu.fr.

[Mu] Mumford, D., *Projective invariants of projective structures*, Proceedings of the Int. Math. Congress, Stockholm, 526-530 (1962). Mumford, D.; Fogarty, J.; Kirwan, F., *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, (1994).

[Ne1] Newstead, P., *Stable bundles of rank 2 and odd degree over a curve of genus 2*, Topology **7**, (1968) 205-215.

[Ne2] Newstead, P., *Vector bundles on algebraic curves. Problem List- Workshop version*, preprint (1994).

[S] Serre, J. P., *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier (1956), 1-42

[Sh] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1977).

[Tu] Tu, L., *Semistable bundles over an elliptic curve*, Adv. in Math. **98** (1993), 1-26.