

Resumo

Tendo como motivação uma observação feita em [2] (Teorema 4) por M. Atiyah, o objectivo deste trabalho foi descrever a construção de uma fibração F sobre a Variedade de Picard de uma Superfície de Riemann X , com fibra sobre $L \in Pic(X)$ dada pelo espaço das classes de equivalência de certas extensões de L . No caso dos fibrados não estáveis usámos como principal referência o livro de Gunning [5], e para o caso dos fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial sobre uma superfície de género 2, o artigo de Narasimhan e Ramanan [10]. Neste último caso pode-se mostrar que F é de facto um fibrado vectorial sobre \mathcal{J}^1 , com fibra em cada L dada pelo espaço das extensões de L por L^{-1} .

Palavras-chave

Fibrados Vectoriais, Superfícies de Riemann, Extensões, Feixes, Cohomologia, Divisores

Conteúdo

Introduo	1
1 Fibrados Vectoriais Holomorfos sobre Superfícies de Riemann	3
1.1 Definições	3
1.2 Redução do Grupo de Estrutura	8
1.3 Extensões	10
1.4 Fibrados Estáveis e Semi-estáveis	13
1.5 Os conjuntos $\mathcal{U}(2, \xi)$ nos casos $g = 0$ e $g = 1$	19
2 Classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial no caso $g = 2$	22
2.1 Divisores	22
2.2 Extensões de fibrados linha e fibrados semi-estáveis	25
2.3 O divisor 2Θ e a sua relação com as extensões	31
2.4 A subvariedade S de $U(2, 0)$	41
Comentário final	44

Introdução

Neste trabalho estudamos Fibrados Vectoriais Holomorfos sobre Superfícies de Riemann compactas ou curvas algébricas não singulares. Estes são objectos geométricos bastante conhecidos e para os quais já foi estudado o problema da classificação. Em particular, são bem conhecidos alguns espaços moduli, por exemplo o chamado moduli de fibrados semi-estáveis de dimensão r e grau d sobre uma Superfície de Riemann X . O conceito de Extensão aparece em vários contextos, nomeadamente quando se consideram sequências exactas de objectos Algébricos. Neste caso as extensões vão ser sequências exactas curtas de fibrados, ou equivalentemente dos feixes localmente livres das secções desses fibrados. A nossa perspectiva será usar este tipo de Extensões para obter informação sobre os fibrados.

O ponto de partida foi um resultado enunciado por Michael Atiyah em [2], segundo o qual se poderia definir um fibrado vectorial \mathcal{F} sobre a Variedade Jacobiana de uma curva algébrica X , em que cada ponto corresponderia a uma extensão de um fibrado linha $L \in Jac(X)$. Este fibrado \mathcal{F} , quocientado com uma relação de equivalência conveniente, teria um subconjunto em correspondência biunívoca com o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados indecomponíveis sobre X com dimensão m e grau d .

O primeiro objectivo foi então conhecer a correspondência a estabelecer entre o conjunto das classes de equivalência de extensões de um determinado fibrado linha e o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vectoriais holomorfos sobre X . Estudamos apenas os fibrados de dimensão 2.

No primeiro capítulo são apresentados os objectos em causa no caso geral (dimensão m) e alguns dos resultados que estabelecem entre eles relações de alguma forma naturais. A partir do momento em que é definido o conceito de Extensão passamos a estudar apenas a dimensão 2. Introduzimos também o conceito de Estabilidade de um fibrado vectorial. Será fundamental na obtenção do resultado mais relevante deste capítulo de acordo com os nossos objectivos - uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$ que classifica classes de equivalência de extensões do fibrado linha ξL^{-1} por um subfibrado L , e o conjunto dos fibrados não estáveis com determinante fixo ξ que têm o fibrado linha L núcleo dessa extensão como subfibrado maximal. Nesta fase serviram de referência os artigos [1], [2] e o livro [5]. Houve uma tentativa de uniformizar e actualizar as notações utilizadas.

No segundo capítulo estudamos o caso dos fibrados semi-estáveis com determinante trivial. Neste caso o conjunto $\mathbb{P}H^1(X, L^{-2})$ que vai classificar extensões de $L \in J^1$ por L^{-1} aparece como instrumento fundamental no estudo da subvariedade S de $\mathcal{U}^{SS}(2, 0)$ (classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e grau 0 sobre X), constituída pelos fibrados semi-estáveis de determinante trivial, no caso em que X tem género $g = 2$. Depois de introduzir o conceito de divisor, naturalmente associado ao de fibrado linha, seguir-se-ão uma série de resultados apresentados em [10] com o objectivo de mostrar que S é isomorfa

a um espaço projectivo, interpretado como o sistema linear associado ao divisor 2Θ em J^1 . Em particular construímos um fibrado sobre J^1 , que denotaremos por F com fibra sobre ξ dada por $H^1(X, \xi^{-2})$. Esta construção é feita na proposição 75 seguindo a referência [10], mas por ser um resultado particularmente relevante, procurámos explicá-lo detalhadamente.

Ao contrário do que foi obtido no 1º capítulo para os fibrados instáveis, neste caso, fixado um subfibrado linha ξ^{-1} de E , com $\xi \in J^1$, obtém-se apenas uma sobrejecção entre o fibrado projectivo $\mathbb{P}(F)$ sobre J^1 , cuja fibra é dada por $\mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$ e a variedade S . No entanto, o facto de qualquer fibrado de dimensão 2 e determinante trivial sobre uma superfície de Riemann de género g poder ser, a menos de S -equivalência, dado como extensão de um fibrado linha de grau $g - 1$ (teorema 58) sugere a possibilidade de usar as extensões como instrumento na classificação de fibrados. Tanto quanto sabemos, a imagem inversa de uma classe de S -equivalência pela sobrejecção estabelecida não é conhecida.

O facto de os mesmos autores de [10] terem publicado mais tarde o artigo [11] dedicado a um estudo análogo mas para superfícies de Riemann de género $g = 3$ despertou a curiosidade de saber se teriam recorrido a um fibrado projectivo sobre J^2 com fibra dada por $\mathbb{P}H^1(X, L^{-2})$, $L \in J^2$, para fazer o estudo da variedade S . No entanto, e apesar de aí terem sido generalizados para qualquer género alguns dos resultados que permitiram estabelecer o isomorfismo do caso $g = 2$, neste artigo os autores usam também, analogamente ao que tinham feito na proposição 75 de [10] uma sequência exacta de fibrados sobre J^1 na construção do fibrado que desempenha o papel de F , que vem a ser também um fibrado sobre J^1 . Procurámos então concluir este trabalho com algumas reflexões sobre uma possível generalização da construção feita em [10], dando relevância às dificuldades que surgem na passagem do caso estudado ao caso geral.

Capítulo 1

Fibrados Vectoriais Holomorfos sobre Superfícies de Riemann

1.1 Definições

Definição 1 Um fibrado vectorial holomorfo de dimensão m sobre a superfície de Riemann X é uma variedade complexa E com uma projecção holomorfa $\pi : E \rightarrow X$ que verifica:

· $\forall p \in X$, $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vectorial complexo de dimensão m .

· Para cada $p \in X$ existe uma vizinhança U e uma aplicação holomorfa φ_U , a que chamamos **trivialização**, tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{C}^m \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

Definição 2 Uma secção holomorfa de um fibrado vectorial E é uma aplicação holomorfa $s : X \rightarrow E$ que verifica $\pi \circ s = Id_X$. Localmente, ou seja, composta com uma trivialização $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$, s fica definida por uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_U(s) : U &\rightarrow U \times \mathbb{C}^m \\ p &\mapsto (p, s_U(p)) \end{aligned}$$

em que $s_U : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ é uma função vectorial holomorfa.

Considerando uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X , o fibrado E fica definido por funções de transição holomorfas $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl(m, \mathbb{C})$ tais que $\varphi_{U_\alpha} \circ \varphi_{U_\beta}^{-1}(p, v) = (p, \phi_{\alpha\beta}(p)v)$. Além disso, para cada $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ tem-se a condição de cociclo $\phi_{\alpha\beta}(p)\phi_{\beta\gamma}(p) = \phi_{\alpha\gamma}(p)$. Podemos então usar elementos $\Phi_{\alpha\beta} \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta})$ tais que $\Phi_{\alpha\beta}(p) = \phi_{\alpha\beta}(p)$ se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, para definir E .

Definição 3 \mathcal{R} é um **pré-feixe** de anéis sobre um espaço topológico X se, para cada aberto U de X , $\mathcal{R}(U)$ for um anel e, sempre que $V \subset U$ forem abertos de X , a aplicação restrição $\rho_V^U : \mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(V)$ que verifica

- $\rho_U^U = id_{\mathcal{R}(U)}$
- $W \subset V \subset U \implies \rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$

for um homomorfismo de anéis.

Os elementos de $\mathcal{R}(U)$ chamam-se **secções** de \mathcal{R} em U .

Definição 4 \mathcal{R} é um **feixe** de anéis sobre um espaço topológico X se for um pré-feixe e se, para cada aberto U de X e $\{U_i\}$ cobertura aberta de U , satisfaz o axioma de feixe, ou seja:

Dados $s_i \in \mathcal{R}(U_i)$ tais que $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para quaisquer i, j , então existe uma única secção $s \in \mathcal{R}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i \quad \forall i$

Exemplo 5 Se X for uma superfície de Riemann, os anéis $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$ com U aberto de X , constituem o feixe de anéis \mathcal{O} .

Definição 6 As fibras \mathcal{R}_p do feixe de anéis \mathcal{R} são os anéis constituídos pelas classes de equivalência para a relação entre secções $s \in \mathcal{R}(U)$ e $t \in \mathcal{R}(V)$ dada por:

$$s \sim t \quad \text{se existe } W \subset U \cap V \text{ tal que } p \in W \text{ e } \rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$$

Consideremos um feixe de anéis \mathcal{R} e um feixe de grupos abelianos \mathcal{S} sobre um espaço topológico X e sejam $\tau : \mathcal{R} \rightarrow X$ e $\pi : \mathcal{S} \rightarrow X$ as respectivas projecções. Olhando para \mathcal{R} apenas como feixe de grupos abelianos, tem-se que $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ tem a estrutura de um feixe de grupos abelianos sobre $X \times X$ com projecção dada por $\tau \times \pi : \mathcal{R} \times \mathcal{S} \rightarrow X \times X$. A restrição deste feixe à diagonal $X \subset X \times X$ é então um feixe de grupos abelianos sobre X que designaremos por $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Definição 7 Seja \mathcal{R} um feixe de anéis.

Um feixe de grupos abelianos \mathcal{S} é um feixe de \mathcal{R} -módulos se existir um homomorfismo de feixes $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que, para cada $p \in X$ a aplicação induzida nas fibras $\mathcal{R}_p \times \mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{S}_p$ define em \mathcal{S}_p uma estrutura de \mathcal{R}_p -módulo.

Para cada $U \subset X$ tem-se $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(U) \simeq \mathcal{R}(U) \times \mathcal{S}(U)$, logo o homomorfismo de feixes atrás referido define em $\mathcal{S}(U)$ uma estrutura de $\mathcal{R}(U)$ -módulo.

Definição 8 Um feixe de \mathcal{R} -módulos isomorfo ao feixe $\mathcal{R}^m = \mathcal{R} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}$ chama-se **feixe livre** de dimensão m .

Definição 9 Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ for uma cobertura aberta de X e os feixes restrição $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ forem feixes livres de dimensão m então \mathcal{F} é um **feixe localmente livre**.

Seja $\mathcal{O}(E)$ o feixe das secções holomorfas do fibrado E .

$\mathcal{O}(E)$ é naturalmente um feixe localmente livre de \mathcal{O} -módulos.

Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ for uma cobertura aberta de X , para cada U_α vai existir um isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \mathcal{O}(E)|_{U_\alpha} &\longrightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^m, \quad \text{com } s_\alpha := s|_{U_\alpha} \\ s|_{U_\alpha} &\longmapsto s_\alpha \end{aligned}$$

Os isomorfismos $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta}^m \longrightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta}^m$ verificam a condição:

$$\phi_{\alpha\beta} \phi_{\beta\gamma} = \phi_{\alpha\gamma} \quad \text{em } \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}^m \quad (1.1)$$

e podemos representá-los matricialmente por $\Phi_{\alpha\beta} \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta})$.

Ora, sendo \mathcal{O} o feixe das funções holomorfas em X , $\{Gl(m, \mathcal{O}_U)\}$ é um pré-feixe de grupos não abelianos para $m > 1$. Consideremos então o seu feixe associado que representaremos por $Gl(m, \mathcal{O})$. Vamos chamar um 1-cociclo a uma colecção de elementos $\Phi_{\alpha\beta} \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta})$ que verifica a condição:

$$\Phi_{\alpha\beta}(p) \Phi_{\beta\gamma}(p) = \Phi_{\alpha\gamma}(p) \quad \text{para cada } p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Considerando uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ da superfície de Riemann compacta X , denota-se por $Z^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O}))$ o conjunto dos 1-cociclos para a cobertura \mathcal{U} . Então, por (1.1) cada fibrado vectorial holomorfo E sobre X pode ser representado por um 1-cociclo $(\Phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O}))$.

Dois cociclos $(\Phi_{\alpha\beta})$ e $(\Psi_{\alpha\beta})$ dizem-se equivalentes se existirem matrizes $\Theta_\alpha \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ tais que

$$\Psi_{\alpha\beta}(p) = \Theta_\alpha(p) \Phi_{\alpha\beta}(p) \Theta_\beta^{-1}(p) \quad \text{para cada } p \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Denotaremos o conjunto das classes de equivalência para esta relação por $H^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O}))$.

Por outro lado, considerando dois fibrados isomorfos E e E' representados respectivamente por $(\Phi_{\alpha\beta})$ e $(\Psi_{\alpha\beta})$, vão existir isomorfismos locais $\theta_\alpha : \mathcal{O}_{U_\alpha}^m \longrightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^m$ cuja representação matricial $\Theta_\alpha \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ verificará a condição: $\Psi_{\alpha\beta} = \Theta_\alpha \Phi_{\alpha\beta} \Theta_\beta^{-1}$. Assim, o isomorfismo de fibrados é dado por uma relação de equivalência idêntica à dos cociclos. Resta verificar que esta não depende da escolha da cobertura aberta \mathcal{U} .

Se considerarmos uma outra cobertura \mathcal{V} de X que resulte de um refinamento da cobertura \mathcal{U} , ou seja de uma aplicação $i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $V_\alpha \subset i(V_\alpha)$ para cada $V_\alpha \in \mathcal{V}$, ela vai induzir uma outra aplicação $i : Z^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O})) \rightarrow Z^1(\mathcal{V}, Gl(m, \mathcal{O}))$ em que a imagem do cociclo $(\Phi_{\alpha\beta})$ é o cociclo $i(\Phi)_{V_\alpha V_\beta} = \rho_{\alpha\beta} \Phi_{i(V_\alpha) i(V_\beta)}$ com $\rho_{\alpha\beta}$ a aplicação restrição a $V_\alpha \cap V_\beta$. È simples verificar que i aplica cociclos equivalentes em cociclos equivalentes e portanto induz uma aplicação

$$i^* : H^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O})) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, Gl(m, \mathcal{O}))$$

Resulta também que para dois refinamentos i e j de \mathcal{U} vem $i^* = j^*$. Estabelecendo então uma relação de ordem no conjunto de todas as coberturas de X em que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ significa que \mathcal{V} é um refinamento de \mathcal{U} , vem que i^* fica uma aplicação bem definida sempre que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Introduce-se então o conjunto $H^1(X, Gl(m, \mathcal{O})) = \text{dir. lim}_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, Gl(m, \mathcal{O}))$.

Assim, o conjunto das **Classes de isomorfismo de Fibrados Vectoriais Holomorfos de dimensão m sobre a superfície de Riemann X** fica em correspondência biunívoca com o espaço de cohomologia:

$$H^1(X, Gl(m, \mathcal{O}))$$

Aproveitamos agora para descrever também os grupos de cohomologia $H^q(X, \mathcal{O}(E))$ para os quais usaremos a notação simplificada $H^q(X, E)$.

Consideremos uma cobertura aberta suficientemente fina $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X .

Usando a notação $U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ para as intersecções $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}$, recordemos que um cociclo $f \in Z^q(\mathcal{U}, E)$ é dado por uma colecção de funções $f_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \in \Gamma(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}, E)$ tais que

$$\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}(p) = 0 \quad \text{sempre que } p \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} \quad (1.2)$$

A secção $f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ pode ser identificada com um elemento do módulo $\Gamma(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}, \mathcal{O}^m)$ através do isomorfismo $\mathcal{O}(E)|_{U_\alpha} \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathcal{O}_{U_\alpha}^m$, sempre que $U_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \subset U_\alpha$. Sendo z_α a aplicação coordenada de $U_\alpha \supset U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$, vamos denotar esse elemento por $\tilde{f}_{\alpha_0 \dots \alpha_q} = f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(z_\alpha)$ e reescrever a condição de cociclo (1.2) como uma condição para funções complexas analíticas

$$\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \tilde{f}_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}(p) = 0 \quad , \quad \text{com } p \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} \quad (1.3)$$

Para uma diferente escolha de coordenada z_β em $U_\beta \supset U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}$ temos a relação

$$f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(z_\beta(p)) = \Phi_{\beta\alpha} f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(z_\alpha(p)) \quad \text{se } p \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_q} \subset U_\alpha \cap U_\beta$$

Usemos então a identificação $\mathcal{O}(E)|_{U_{\alpha_{q+1}}} \xrightarrow{\phi_{\alpha_{q+1}}} \mathcal{O}_{U_{\alpha_{q+1}}}^m$ dada pela vizinhança coordenada $U_{\alpha_{q+1}} \supset U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}$ e a relação entre coordenadas $f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(z_{\alpha_{q+1}}) = \Phi_{\alpha_{q+1}\alpha_q} f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(z_{\alpha_q})$ para escrever 1.3 na forma

$$\sum_{j=0}^q (-1)^j \tilde{f}_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}(p) + (-1)^{q+1} \Phi_{\alpha_{q+1}\alpha_q} \tilde{f}_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(p) = 0$$

sendo a respectiva condição de cobordo dada por

$$\left(\delta \tilde{f} \right)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}(p) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \tilde{f}_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{q+1}}(p) + (-1)^{q+1} \Phi_{\alpha_{q+1}\alpha_q} \tilde{f}_{\alpha_0 \dots \alpha_q}(p)$$

Em particular, podemos descrever o grupo $H^1(X, E)$, em termos de um 1-cociclo representativo $(\Phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}l(m, \mathcal{O}))$, como sendo dado por funções complexas analíticas $f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^m$ que verificam

$$f_{\beta\gamma}(p) - f_{\alpha\gamma}(p) + \Phi_{\gamma\beta}(p) f_{\alpha\beta}(p) = 0 \quad \text{se } p \in U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \quad (1.4)$$

Usaremos a notação $h^i(E) = \dim H^i(X, E)$.

Exemplos de construções com fibrados vectoriais e respectivos cociclos representativos:

1. Se E_1 for representado por $(\Phi_{1\alpha\beta})$ e E_2 por $(\Phi_{2\alpha\beta})$, a soma directa $E_1 \oplus E_2$ vem representada por $(\Psi_{\alpha\beta})$ com

$$\Psi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \Phi_{1\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \Phi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

2. Se E for representado por $(\Phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{G}l(m, \mathcal{O}))$, se F for um subfibrado de E representado por $(\Psi_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{G}l(k, \mathcal{O}))$ e G o fibrado quociente E/F

representado por $(\Omega_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{G}l(m-k, \mathcal{O}))$ então E é extensão de F por G e

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \Psi_{\alpha\beta} & \Lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & \Omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad \text{com } \Lambda_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}_{k, m-k}(\mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta})$$

3. Se E for representado por $(\Phi_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{G}l(m, \mathcal{O}))$, o fibrado linha $\det E$ vem representado por $(\xi_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{G}l(1, \mathcal{O})) = Z^1(X, \mathcal{O}^*)$ em que

$$\xi_{\alpha\beta} = \det \Phi_{\alpha\beta}$$

Definição 10 Um fibrado vectorial E diz-se decomponível se se puder escrever como soma directa de subfibrados: $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k$

Definição 11 Para L fibrado linha sobre X a sua primeira classe de Chern $c_1(L)$ é a imagem de L pelo morfismo de bordo $H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z})$ associado à sequência exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

Pelo Teorema de de Rham $H^*(X, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^*(X)$ e portanto $c_1(L)$ é um elemento de $H_{DR}^2(X)$ usando a aplicação natural $H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{DR}^2(X)$.

Definição 12 O grau de E é o número inteiro definido por :

$$\deg E = \deg(\det E) = \int_X c_1(\det E) \in \mathbb{Z}$$

onde c_1 é a primeira classe de Chern do fibrado linha $\det E$.

Enunciaremos sem demonstração três teoremas fundamentais na teoria dos fibrados vectoriais holomorfos sobre superfícies de Riemann:

Teorema 13 (Riemann-Roch para fibrados vectoriais)

Se X for uma superfície de Riemann compacta de género g e E um fibrado vectorial holomorfo de dimensão m sobre X tem-se

$$h^0(E) - h^1(E) = \deg E + m(1 - g)$$

Teorema 14 (Dualidade de Serre)

Seja K o fibrado canónico das 1-formas sobre X superfície de Riemann, então tem-se

$$H^1(X, E)^* \simeq H^0(X, K \otimes E^*)$$

Teorema 15 (Teorema B de Serre)

Se L for um fibrado linha positivo ($\deg L > 0$) sobre X e E um fibrado vectorial holomorfo de dimensão m sobre X existe k_0 tal que

$$H^1(X, E \otimes L^k) = 0 \quad \forall k \geq k_0$$

Observação 16 Em [4](p.161) é feita uma estimativa de k_0 para variedades de Kähler usando a curvatura associada à métrica de L e os isomorfismos das cohomologias harmónica, de Dolbeault e de Čech $\mathcal{H}^{0,1}(E) \simeq H_{\bar{\partial}}^{0,1}(E) \simeq H^1(X, \mathcal{O}(E))$.

1.2 Redução do Grupo de Estrutura

O resultado seguinte é determinante no tipo de cociclo representativo que vamos obter para cada fibrado vectorial holomorfo sobre uma superfície de Riemann X e será demonstrado com base nos dois lemas que se lhe seguem.

Teorema 17 *Qualquer fibrado vectorial holomorfo de dimensão $m > 1$ sobre X tem um subfibrado linha.*

Lema 18 *Qualquer fibrado vectorial holomorfo sobre X tem uma secção meromorfa não trivial*

Demonstração:

Seja L um fibrado linha positivo e E um fibrado de dimensão $m \geq 1$. Usando o Teorema B de Serre e o Teorema de Riemann-Roch para fibrados vectoriais tem-se:

$$h^0(E \otimes L^k) = \deg(E \otimes L^k) + m(1 - g) \quad \forall k \geq k_0.$$

Como $\deg(E \otimes L^k) = (\deg E)rk(L^k) + rk(E)\deg(L^k) = \deg E + mk\deg L$, vem

$$h^0(E \otimes L^k) = \deg E + mk\deg L + m(1 - g) \quad \forall k \geq k_0.$$

Para $k \geq k_0$ suficientemente grande tem-se então $h^0(E \otimes L^k) > 0$ e, como caso particular, $h^0(L^k) > 0$, logo vai existir alguma secção meromorfa de L^{-k} e o resultado sai de $E = (E \otimes L^k) \otimes L^{-k}$. ■

Lema 19 *Se E tiver uma secção meromorfa não trivial então tem um subfibrado linha.*

Demonstração: Denotaremos por \mathcal{M} o feixe das secções meromorfas do fibrado E de dimensão $m \geq 1$.

Seja s secção meromorfa não trivial de E , $s = \{s_\alpha\}$ com $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}^m)$. Refinando se necessário a cobertura \mathcal{U} , podemos garantir que s_α seja holomorfa com pelo menos uma das suas componentes não nula em todos os pontos do aberto U_α , excepto possivelmente num. Seja z_α a função coordenada que aplica esse ponto na origem $z_\alpha = 0$. Então vai existir um número inteiro r_α tal que $z_\alpha^{r_\alpha} s_\alpha$ é função holomorfa com pelo menos uma das suas componentes não nula em U_α . Consideremos então uma matriz de componentes holomorfas $\Theta_\alpha \in Gl(m, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ tal que:

$$\Theta_\alpha z_\alpha^{r_\alpha} s_\alpha(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^m, \quad \forall p \in U_\alpha$$

Seja $(\Phi_{\alpha\beta})$ um cociclo representativo de E que verifique $s_\alpha = \Phi_{\alpha\beta} s_\beta$. Consideremos um cociclo equivalente $(\Psi_{\alpha\beta})$ dado por $\Psi_{\alpha\beta} = \Theta_\alpha \Phi_{\alpha\beta} \Theta_\beta^{-1}$ e vejamos qual a expressão da secção s em termos de $\Psi_{\alpha\beta}$:

$$\Theta_\alpha s_\alpha = \Theta_\alpha \Phi_{\alpha\beta} s_\beta \implies \Theta_\alpha s_\alpha = \Psi_{\alpha\beta} \Theta_\beta s_\beta \implies s = \{\Theta_\alpha s_\alpha\}.$$

Mas, por definição de Θ_α , tem-se:

$$\Theta_\alpha s_\alpha(p) = \begin{bmatrix} z_\alpha^{-r_\alpha}(p) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall p \in U_\alpha \implies s = \left\{ \begin{bmatrix} z_\alpha^{-r_\alpha} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ e vem : } \begin{bmatrix} z_\alpha^{-r_\alpha} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \psi_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} z_\beta^{-r_\beta} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então $\Psi_{\alpha\beta}$ tem que ser da forma:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

em que $z_\alpha^{-r_\alpha} = \varphi_{\alpha\beta} z_\beta^{-r_\beta}$. O fibrado linha L representado por $(\varphi_{\alpha\beta})$ é subfibrado de E e tem uma secção meromorfa $\{z_\alpha^{-r_\alpha}\}$ que induz a secção $s = \{\Theta_\alpha s_\alpha\}$. ■

Corolário 20 *Qualquer fibrado vectorial holomorfo de dimensão m sobre X pode ser representado por um cociclo $(\Phi_{\alpha\beta})$ da forma:*

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{1\alpha\beta} & * & \cdots & * \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{m\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Seja L_1 o fibrado linha representado por $(\varphi_{1\alpha\beta})$. L_1 é subfibrado de E . A submatriz que resulta de eliminar as 1^{as} linha e coluna dá origem a um cociclo representativo do fibrado quociente E/L_1 . Pelo teorema anterior vai existir um subfibrado linha L_2 de E/L_1 representado por $(\varphi_{2\alpha\beta})$ tal que E/L_1 fique representado na forma:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{2\alpha\beta} & * \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & * \end{bmatrix}$$

O resultado sai por indução em m . ■

Existe então uma filtração de E

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_{m-1} \subseteq E_m = E$$

em que $L_i = E_i/E_{i-1}$ é o fibrado linha representado por $(\varphi_{i\alpha\beta})$.

Atiyah chama à sequência de fibrados linha (L_1, L_2, \dots, L_m) uma **decomposição** de E .

Porque a redução do grupo de estrutura pode ter várias formas, ou seja, porque existem várias decomposições possíveis, é introduzido o conceito de **decomposição maximal** com base no seguinte lema:

Lema 21 *Os inteiros $\deg(L)$, com L subfibrado linha de E são limitados superiormente.*

Demonstração:

Feita a redução do grupo de estrutura, seja E representado pelo cociclo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{1\alpha\beta} & * & \cdots & * \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{m\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Comecemos por provar que se um fibrado E assim representado tem uma secção holomorfa não trivial, então pelo menos um dos fibrados linha na decomposição tem uma secção holomorfa não trivial.

Suponhamos que E tem uma secção holomorfa não trivial $s = \{s_\alpha\}$, então pelo menos uma das componentes s_{α_i} de $s_\alpha = (s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_m})^\top$ é não identicamente nula. Fixemos então $r \in \{1, \dots, m\}$ tal que $s_{\alpha_r} \neq 0$ mas $s_{\alpha_i} \equiv 0$ para $r < i \leq m$, ou seja $s_\alpha = (s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r}, 0, \dots, 0)^\top$.

$s_\alpha = \Phi_{\alpha\beta} s_\beta \implies s_{\alpha_r} = \varphi_{r\alpha\beta} s_{\beta_r}$, logo $s_r = \{s_{\alpha_r}\}$ é uma secção holomorfa não trivial do fibrado $L_r = E_r/E_{r-1}$ na decomposição de E .

Consideremos então um subfibrado linha L de E .

$L^{-1} \otimes E$ tem uma secção holomorfa não trivial, logo, para algum $r \in \{1, \dots, m\}$, $L^{-1}L_r$ tem uma secção holomorfa não trivial e vem

$$\deg L_r - \deg L = \deg(L^{-1}L_r) \geq 0 \implies \deg L \leq \deg L_r$$

Tem-se então

$$\deg L \leq \max_{1 \leq r \leq m} \deg L_r \quad (1.5)$$

■

Definição 22 (L_1, L_2, \dots, L_m) é uma **decomposição maximal** de E se:

- (i) L_1 tem grau máximo (finito pelo lema)
- (ii) (L_2, \dots, L_m) é uma decomposição maximal de E/L_1 .

Observação 23 - Pelo lema acima qualquer fibrado admite uma decomposição maximal (quando for introduzido o conceito de estabilidade veremos em que caso se tem a unicidade).

- Se (L_1, \dots, L_m) é uma decomposição maximal então $\deg L_1 \geq \dots \geq \deg L_m$.

1.3 Extensões

No que se segue considerar-se-á apenas o caso dos fibrados vectoriais holomorfos de dimensão 2:

Definição 24 Diz-se que o fibrado E de rk 2 é **extensão** do fibrado linha L_2 pelo fibrado linha L_1 se existe uma sequência exacta

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow E \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0$$

Definição 25 Duas extensões E e E' de L_2 por L_1 dizem-se **equivalentes** se existir um isomorfismo de sequências exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L_2 \longrightarrow 0 \\ & & Id \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Id \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & L_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da secção anterior podemos concluir que todo o fibrado E de dimensão 2 é extensão de um fibrado linha, já que uma decomposição (L_1, L_2) não é mais do que uma extensão de um

fibrado linha L_2 por L_1 . Não é difícil ver que as extensões equivalentes correspondem a fibrados isomorfos. Podemos pois garantir a existência de uma sobrejecção:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Classes de equivalência de} \\ \text{Extensões de dim 2 e grau } d \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes de isomorfismo de Fibrados} \\ \text{holomorfos de dim 2 e grau } d \end{array} \right\}$$

Resta saber em que casos podemos garantir uma correspondência biunívoca.

Observação 26 *Seja $\mathcal{O}(L)$ o feixe das secções holomorfas do fibrado linha L e $(\zeta_{\alpha\beta})$ um seu cociclo representativo. O grupo de cohomologia $H^1(X, \mathcal{O}(L))$, para o qual usaremos a notação simplificada $H^1(M, L)$, fica definido por funções $\sigma_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ que verificam $\sigma_{\beta\gamma} + \zeta_{\gamma\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (1.4).*

Teorema 27 *O conjunto das classes de equivalência de extensões do fibrado linha L_2 pelo fibrado linha L_1 está em correspondência biunívoca com o grupo de cohomologia*

$$H^1(X, L_1 L_2^{-1})$$

A extensão trivial $L_1 \oplus L_2$ corresponde ao elemento 0.

Demonstração:

Se L_1 e L_2 forem fibrados linha representados respectivamente por $(\varphi_{1\alpha\beta})$ e $(\varphi_{2\alpha\beta})$, a representação de E em termos de cociclos é da forma :

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{1\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

A condição de cociclo $\Phi_{\alpha\beta} \Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\gamma}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ reduz-se então à condição:

$$\varphi_{1\alpha\beta} \lambda_{\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\beta} \varphi_{2\beta\gamma} = \lambda_{\alpha\gamma} \quad (1.6)$$

De acordo com a observação anterior, substituindo na condição (1.6) as funções $\lambda_{\alpha\beta}$ por $\sigma_{\alpha\beta} = \varphi_{1\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\alpha\beta}$ obtemos uma condição equivalente em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$:

$$\sigma_{\beta\gamma} + \varphi_{1\gamma\beta} \varphi_{2\gamma\beta}^{-1} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma}$$

Ou seja, por (1.4) os elementos $\sigma_{\alpha\beta}$ que definem um cociclo representativo de E como extensão de L_2 por L_1 formam um cociclo $(\sigma_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, L_1 L_2^{-1})$.

Por outro lado, E e E' serem extensões equivalentes de L_2 por L_1 significa que ficam definidas por cociclos equivalentes. Neste caso isto significa que vão existir funções holomorfas $\{h_\alpha\}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1\alpha\beta} & \lambda'_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -h_\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou, usando as funções $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}(p) - \sigma'_{\alpha\beta}(p) = h_{\beta}(p) - h_{\alpha}(p)$ com $p \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$.

Tem-se então que duas extensões são equivalentes quando os cociclos que as definem são cohomólogos. ■

Observação 28 Tendo em conta o isomorfismo canónico $L_2^{-1}L_1 \simeq \text{Hom}(L_2, L_1)$ podemos referir-nos ao espaço $H^1(X, L_1L_2^{-1})$ usando a notação $H^1(X, \text{Hom}(L_2, L_1))$. Esta é aliás a notação utilizada em versões mais actuais deste mesmo resultado e mais geralmente na classificação de extensões de fibrados de dimensão superior $0 \rightarrow F_1 \rightarrow W \rightarrow F_2 \rightarrow 0$. Nomeadamente em [4](p.722) onde o resultado é demonstrado aplicando o functor $\text{Hom}(F_2, *)$ à sequência exacta e passando à cohomologia:

$$H^0(X, \text{Hom}(F_2, W)) \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(F_2, F_2)) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \text{Hom}(F_2, F_1))$$

A obstrução à decomposição trivial de W vem dada por $\partial(\text{Id}_{F_2})$. Assim o cociclo $\sigma = (\sigma_{\alpha\beta}) \in H^1(X, L_1L_2^{-1})$ que classifica E com extensão de L_2 por L_1 no teorema 27 vai ser, de acordo com esta versão, imagem de Id_{L_2} pelo morfismo de bordo ∂ : $\sigma(E) = \partial(\text{Id}_{L_2})$

Corolário 29 Seja E extensão de L_2 por L_1 .

Se $\deg L_1 - \deg L_2 > 2g - 2$ então E é decomponível em soma directa $E = L_1 \oplus L_2$.

Demonstração:

Pela dualidade de Serre $h^1(M, L_1L_2^{-1}) = h^0(M, KL_1^{-1}L_2)$.

Como $\deg(KL_1^{-1}L_2) = 2g - 2 - \deg L_1 + \deg L_2 = 2g - 2 - (\deg L_1 - \deg L_2) < 0$, vem $H^1(M, L_1L_2^{-1}) = \{0\}$ ■

1.4 Fibrados Estáveis e Semi-estáveis

Já garantimos a existência de uma decomposição maximal para cada fibrado de dimensão 2. Vamos procurar condições que garantam a unicidade. A existirem, a correspondência entre fibrados holomorfos e extensões, quando fixamos um subfibrado, fica, nessas circunstâncias, biunívoca.

Começaremos por fixar o fibrado $\det E$. Ou seja vamos tentar descrever os conjuntos

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \{E \in H^1(X, \mathcal{G}l(2, \mathcal{O})) \mid \det E = \xi\}$$

Note-se que para qualquer fibrado linha L se tem $\mathcal{U}(2, \xi) \otimes L = \mathcal{U}(2, \xi L^2)$, pelo que qualquer conjunto $\mathcal{U}(2, \xi)$ é isomorfo a $\mathcal{U}(2, \eta)$ com $\deg \eta = 0$ ou -1 .

Introduziremos agora o conceito de estabilidade de fibrados vectoriais.

Definição 30 O declive de um fibrado E é o valor $\mu(E)$ dado por $\mu(E) = \frac{\deg E}{rk E}$.

Definição 31 Um fibrado E diz-se **estável** (respectivamente **semistável**) se para qualquer subfibrado próprio $F \subset E$, se tem

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{respectivamente } \mu(F) \leq \mu(E)).$$

No caso de um fibrado E de dimensão 2 a estabilidade (respectivamente semi-estabilidade) é então definida por

$$\deg L < \frac{1}{2} \deg E \quad (\text{respectivamente } \deg L \leq \frac{1}{2} \deg E)$$

para qualquer subfibrado linha L de E .

Observe-se que, para qualquer fibrado linha L , vem $F \subset L \otimes E$ se e só se $L^{-1}F \subset E$. Portanto, se E for estável e $F \subset L \otimes E$ vem

$$\deg(L^{-1}F) < \frac{1}{2} \deg E \implies \deg F = \deg(L^{-1}F) + \deg L < \frac{1}{2} \deg E + \deg L = \frac{1}{2} \deg(L \otimes E)$$

Ou seja, $L \otimes E$ também fica estável.

A estabilidade é portanto preservada pelo produto tensorial com fibrados linha.

Isto permite decompor de forma natural o conjunto $\mathcal{U}(2, \xi)$ como união disjunta do subconjunto $\mathcal{U}^S(2, \xi)$ dos fibrados estáveis e do subconjunto $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi)$ dos fibrados não estáveis no qual estão incluídos os fibrados estritamente semi-estáveis:

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \mathcal{U}^S(2, \xi) \cup \mathcal{U}^{nS}(2, \xi)$$

De acordo com o resultado (1.5) podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 32 Chama-se **ORDEM DE DIVISOR** de um fibrado E ao número

$$div E = \max_{L \subset E} \deg L$$

No caso em que E tem dimensão 2, para (L_1, L_2) decomposição maximal de E , tem-se $\text{div}E = \text{deg} L_1$.

Podemos assim definir as componentes de $\mathcal{U}(2, \xi)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^S(2, \xi) &= \left\{ E \in \mathcal{U}(2, \xi) \mid \text{div}E < \frac{1}{2} \text{deg} \xi \right\} \\ \mathcal{U}^{nS}(2, \xi) &= \left\{ E \in \mathcal{U}(2, \xi) \mid \text{div}E \geq \frac{1}{2} \text{deg} \xi \right\}\end{aligned}$$

Lema 33 *Se X for uma superfície de Riemann compacta de género g e $E \in H^1(X, \mathcal{G}l(2, \mathcal{O}))$, tem-se a desigualdade*

$$\text{div}E \geq \frac{1}{2} \text{deg} E - g$$

Se E for decomponível tem-se mesmo $\text{div}E \geq \frac{1}{2} \text{deg} E$.

Demonstração:

Seja L um fibrado linha sobre X . Do teorema de Riemann-Roch sai que

$$\begin{aligned}h^0(X, L^{-1} \otimes E) &= h^1(X, L^{-1} \otimes E) + \text{deg}(L^{-1} \otimes E) + 2(1 - g) \geq \\ &\geq \text{deg}(L^{-1} \otimes E) + 2(1 - g) = -2 \text{deg} L + \text{deg} E + 2(1 - g) = \text{deg} E + 2(1 - g - \text{deg} L).\end{aligned}$$

Sempre que $\text{deg} E + 2(1 - g - \text{deg} L) > 0 \iff \text{deg} L < \frac{1}{2} \text{deg} E + 1 - g$ vem que $h^0(X, L^{-1} \otimes E) > 0$, ou seja $L^{-1} \otimes E$ tem uma secção holomorfa não trivial.

Mas nesse caso vai existir um subfibrado linha $F \subset L^{-1} \otimes E$ com uma secção holomorfa não trivial, isto é, tal que $\text{deg} F \geq 0$.

Então tem-se $FL \subset E$ e $\text{div}E \geq \text{deg} F + \text{deg} L \geq \text{deg} L$.

Conclusão, como $\text{deg} L$ pode ser qualquer número inteiro n , para $n < \frac{1}{2} \text{deg} E + 1 - g$ vem $\text{div}E \geq n$. Daqui sai a primeira desigualdade pretendida.

Se $E = L_1 \oplus L_2$ então $\text{deg} E = \text{deg} L_1 + \text{deg} L_2 \leq 2 \text{div}E$. ■

Lema 34 *Seja X uma superfície de Riemann compacta e $E \in \mathcal{U}^{nS}(2, \xi)$*

(i) *Se $\text{div}E > \frac{1}{2} \text{deg} \xi$ existe um único subfibrado linha L de E tal que $\text{deg} L = \text{div}E$;*

(ii) *Se $\text{div}E = \frac{1}{2} \text{deg} \xi$ e E for indecomponível, existe um único subfibrado linha L de E tal que $\text{deg} L = \text{div}E$.*

Demonstração:

(i) Seja $\text{div}E > \frac{1}{2} \text{deg} \xi$ e L_1 um subfibrado linha de E tal que $\text{deg} L_1 = \text{div}E$. Considerando $L_2 = E/L_1$, vem que L_1 e L_2 , são fibrados linha na diagonal da representação reduzida de E .

Se L for um outro subfibrado linha de E tal que $\text{deg} L = \text{div}E$, vem que $L^{-1} \otimes E$ tem uma secção holomorfa não trivial e portanto, ou $L^{-1}L_1$ ou $L^{-1}L_2$ têm uma secção holomorfa não trivial. Mas

$$\text{deg}(L^{-1}L_2) = -\text{deg} L + \text{deg} E - \text{deg} L_1 = \text{deg} \xi - 2 \text{div}E < 0.$$

Logo vai ser $L^{-1}L_1$ a ter uma secção holomorfa não trivial. Por outro lado,

$$\text{deg}(L^{-1}L_1) = -\text{deg} L + \text{deg} L_1 = 0$$

Logo tem que ser $L^{-1}L_1 = 1 \implies L = L_1$.

(ii) Seguindo os mesmos passos que no caso anterior chegamos desta vez a $\text{deg}(L^{-1}L_2) = 0$.

Seja $s = \begin{bmatrix} s_{1\alpha} \\ s_{2\alpha} \end{bmatrix}$ a secção holomorfa não trivial de $L^{-1} \otimes E$.

Se $s_2 \neq 0$ então $L^{-1}L_2 = 1$ e, nesse caso, seria possível definir $L^{-1} \otimes E$ por um cociclo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para o qual $s = \begin{bmatrix} s_{1\alpha} \\ c \end{bmatrix}$ com $c \neq 0$, seria uma secção holomorfa não trivial tal que

$$s_{1\alpha}(p) = \varphi_{\alpha\beta}(p) s_{1\beta}(p) + c\lambda_{\alpha\beta}(p) \quad \text{com } p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Ter-se-ia então o cociclo $(\lambda_{\alpha\beta})$ cohomólogo ao zero de $H^1(X, L^{-1}L_1)$.

Do Teorema 27(Classificação de extensões) resultaria $L^{-1}E$ decomponível (extensão de $L^{-1}L_1$ por 1) e, portanto, E também seria decomponível. Tem então que ser $L^{-1}L_1$ a ter uma secção holomorfa não trivial e repete-se a conclusão do caso (i). ■

Este resultado garante a unicidade do decomposição maximal para os fibrados não estáveis nas condições indicadas.

Vamos usar a notação $\mathcal{U}^0(2, \xi)$ para nos referirmos ao fibrados decomponíveis sobre X que tenham determinante ξ . Pelo lema 33 vem $\mathcal{U}^0(2, \xi) \subset \mathcal{U}^{nS}(2, \xi)$.

Recordemos que a variedade de Picard $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ se obtém da sequência exacta de cohomologia associada à sequência exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

isto é, como extensão

$$0 \longrightarrow Pic^0(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $Pic^0(X)$ é uma variedade abeliana de dimensão g isomorfa a \mathbb{C}^g/Λ , sendo $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ um reticulado maximal.

Observemos agora que $\mathcal{U}^0(2, \xi)$ pode ser identificado com o quociente de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ pela involução $L \longrightarrow \xi L^{-1}$, já que, na aplicação

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{O}^*) &\longrightarrow \mathcal{U}^0(2, \xi) \\ L &\longmapsto L \oplus L^{-1}\xi \end{aligned}$$

L_1 e L_2 têm a mesma imagem se e só se $L_2 = \xi L_1^{-1}$.

Como $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ é uma variedade complexa analítica de dimensão g , vem que $\mathcal{U}^0(2, \xi)$ também é uma variedade complexa analítica de dimensão g denominada **Variedade de Kummer**, sendo que alguns autores dão este nome apenas ao quociente de $Pic^0(X)$ pela mesma involução.

Usando o lema anterior podemos definir os conjuntos

$$\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L) = \{E \in \mathcal{U}^{nS}(2, \xi) \setminus \mathcal{U}^0(2, \xi) \mid L \subset E \text{ e } \text{div} E = \text{deg } L\}$$

e garantir que

$$\mathcal{U}^{nS}(2, \xi) = \mathcal{U}^0(2, \xi) \cup \bigcup_{\text{deg } L \geq \frac{1}{2} \text{deg } \xi} \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$$

é uma união disjunta.

Falta agora uma descrição mais detalhada dos conjuntos $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$.

Teorema 35 *Numa superfície de Riemann compacta de género g existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$, onde L e ξ são fibrados linha tais que $\deg L \geq \frac{1}{2} \deg \xi$, e os pontos do espaço projectivo $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$.*

Demonstração:

Observemos que, de acordo com o Teorema 27, $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$ classifica as extensões não triviais de ξL^{-1} por L .

Consideremos então L e ξ fibrados linha tais que $\deg L \geq \frac{1}{2} \deg \xi$, e seja E uma extensão de $L_2 = \xi L^{-1}$ por L .

Como $\deg L_2 = \deg \xi - \deg L \leq \deg \xi - \frac{1}{2} \deg \xi = \frac{1}{2} \deg \xi$, vem $\deg L \geq \deg L_2$ e, pela majoração (1.5), tem-se $\text{div} E \leq \deg L$. Mas, por L ser subfibrado linha de E vem $\text{div} E \geq \deg L$. Logo $\text{div} E = \deg L \geq \frac{1}{2} \deg \xi$ e portanto $E \in \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$.

Por outro lado, se considerarmos $E \in \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$, tem-se que L é subfibrado linha de E e, se chamarmos L_2 ao quociente E/L , escolhendo uma cobertura aberta \mathcal{U} de X , podemos representá-lo por um cociclo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

em que $(\varphi_{\alpha\beta}), (\varphi_{2\alpha\beta}) \in Z^1(X, \mathcal{O}^*)$ representam respectivamente L e L_2 . Como $\det E = \xi$ tem que vir $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{2\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta}$ logo tem-se $L_2 = L^{-1}\xi$, ou seja E é dado como extensão de ξL^{-1} por L .

De acordo com a demonstração do Teorema 27 os elementos $\lambda_{\alpha\beta}$ são funções analíticas definidas nas intersecções $U_\alpha \cap U_\beta$ tais que as funções $\sigma_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\lambda_{\alpha\beta}$ formem um cociclo $(\sigma_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, LL_2^{-1}) = Z^1(\mathcal{U}, L^2\xi^{-1})$. Resta verificar que se considerarmos um fibrado E' isomorfo a E teremos ambos a corresponder ao mesmo elemento de $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$.

Sejam então $(\sigma_{\alpha\beta}), (\sigma'_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, L^2\xi^{-1})$ os cociclos dados por $\sigma_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\lambda_{\alpha\beta}$ e $\sigma'_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\lambda'_{\alpha\beta}$ em que $\lambda_{\alpha\beta}$ e $\lambda'_{\alpha\beta}$ definem E e E' respectivamente como extensões de ξL^{-1} por L . Se E e E' forem isomorfos vão existir isomorfismos locais $\theta_\alpha : \mathcal{O}_{U_\alpha}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^2$ cuja representação matricial $\Theta_\alpha \in Gl(2, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ verificará a condição: $\Phi'_{\alpha\beta} = \Theta_\alpha \Phi_{\alpha\beta} \Theta_\beta^{-1}$.

Escrevendo explicitamente as matrizes $\Theta_\alpha = \begin{bmatrix} f_{11\alpha} & f_{12\alpha} \\ f_{21\alpha} & f_{22\alpha} \end{bmatrix}$ vem

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \lambda'_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11\beta} & f_{12\beta} \\ f_{21\beta} & f_{22\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11\alpha} & f_{12\alpha} \\ f_{21\alpha} & f_{22\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & \varphi_{2\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

donde sai a igualdade

$$\varphi_{2\alpha\beta} f_{21\beta} = f_{21\alpha} \varphi_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

Ou seja, $(f_{21\alpha}) \in \Gamma(X, L^{-1}L_2) = \Gamma(X, L^{-2}\xi)$.

Mas recordemos que $E, E' \in \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$ e que portanto

$\deg L \geq \frac{1}{2} \deg \xi \iff 2 \deg L \geq \deg \xi \iff -2 \deg L + \deg \xi \leq 0 \iff \deg(L^{-2}\xi) \leq 0$, logo a secção $(f_{21\alpha})$ só pode ser não trivial no caso $\deg L = \frac{1}{2} \deg \xi \iff \deg(L^{-2}\xi) = 0 \iff \deg(LL_2^{-1}) = 0$. E nesse caso LL_2^{-1} ter uma secção não trivial implica que $LL_2^{-1} = 1 \iff L = L_2$. Da igualdade (1.9) viria então que $(f_{21\alpha})$ seria uma função holomorfa globalmente definida numa superfície de Riemann compacta, ou seja, teria que ser uma constante C não nula. Mas então de (1.8) sairia

$$\varphi_{2\alpha\beta} f_{22\beta} = C\lambda_{\alpha\beta} + f_{22\alpha} \varphi_{2\alpha\beta} \iff f_{22\beta} - f_{22\alpha} = C\varphi_{2\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\alpha\beta} \quad (1.10)$$

Mas $C\varphi_{2\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\alpha\beta} = C\varphi_{2\alpha\beta}^{-1} \varphi_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = C\sigma_{\alpha\beta} \in Z^1(\mathcal{U}, LL_2^{-1})$, logo da última igualdade de (1.10) vem que $C\sigma_{\alpha\beta} = 0$ em $H^1(X, LL_2^{-1}) = H^1(X, \mathcal{O})$. Como $C \neq 0$ tem que ser $(\sigma_{\alpha\beta}) = 0$. Ora o Teorema 27 diz-nos que neste caso E seria decomponível - uma contradição.

Conclusão, a secção $(f_{21\alpha})$ tem que ser trivial.

Então (1.8) reduz-se às equações

$$f_{11\alpha} = f_{11\beta}$$

$$f_{22\alpha} = f_{22\beta}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} f_{12\beta} + \lambda'_{\alpha\beta} f_{22\beta} = f_{11\alpha} \lambda_{\alpha\beta} + f_{12\alpha} \varphi_{2\alpha\beta}$$

As primeiras duas igualdades mostram que f_{11} e f_{22} são funções holomorfas globalmente definidas numa superfície de Riemann compacta, logo são iguais respectivamente a constantes a_1 e a_2 tais que $a_1 a_2 \neq 0$. Resta então a última condição que fica na forma

$$\varphi_{\alpha\beta} f_{12\beta} + \lambda'_{\alpha\beta} a_2 = a_1 \lambda_{\alpha\beta} + f_{12\alpha} \varphi_{2\alpha\beta} \iff a_1 \lambda_{\alpha\beta} - \lambda'_{\alpha\beta} a_2 = \varphi_{\alpha\beta} f_{12\beta} - f_{12\alpha} \varphi_{2\alpha\beta}$$

Multiplicando esta última igualdade por $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ ficamos com

$$a_1 \sigma_{\alpha\beta} - a_2 \sigma'_{\alpha\beta} = f_{12\beta} - f_{12\alpha} \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \varphi_{2\alpha\beta}$$

ou seja, aos fibrados E e E' são equivalentes se e só se existir uma 0 - cocadeia

$(f_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, LL_2^{-1}) = C^0(\mathcal{U}, L^2\xi^{-1})$ tal que

$$a_1 \sigma_{\alpha\beta}(p) - a_2 \sigma'_{\alpha\beta}(p) = f_\beta(p) - f_\alpha(p) \text{ com } p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Isto significa que E e E' definidos como extensões de ξL^{-1} por L pelos elementos σ e σ' são equivalentes se e só se existirem constantes a_1 e a_2 com $a_1 a_2 \neq 0$ tais que $a_1 \sigma - a_2 \sigma' = 0$ em $H^1(X, L^2\xi^{-1})$, ou seja, se e só se a σ e σ' corresponde o mesmo ponto de $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$.

■

1.5 Os conjuntos $\mathcal{U}(2, \xi)$ nos casos $g = 0$ e $g = 1$

Comecemos pelo caso $g = 0$, ou seja vamos descrever os conjuntos $\mathcal{U}^S(2, \xi)$ e $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi)$ no caso da superfície de Riemann ser $X = \mathbb{P}^1$.

Os elementos $E \in \mathcal{U}^S(2, \xi)$ caracterizam-se pela desigualdade $\text{div}E < \frac{1}{2} \text{deg} \xi$. Mas pelo lema 33, como $g = 0$ vem também $\text{div}E \geq \frac{1}{2} \text{deg} \xi$. Então neste caso $\mathcal{U}^S(2, \xi) = \emptyset$.

Por outro lado o Teorema 35 diz-nos que os conjuntos $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$ estão em correspondência biunívoca com o espaço projectivo \mathbb{P}^n com $n = h^1(\mathbb{P}^1, L^2\xi^{-1}) - 1$. Ora, pela dualidade de Serre tem-se $h^1(\mathbb{P}^1, L^2\xi^{-1}) = h^0(\mathbb{P}^1, KL^{-2}\xi)$. Mas $\text{deg}(KL^{-2}\xi) = -2 - 2\text{deg}L + \text{deg}\xi \leq -2$, logo $h^1(\mathbb{P}^1, L^2\xi^{-1}) = h^0(\mathbb{P}^1, KL^{-2}\xi) = 0$ e portanto $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L) = \emptyset$.

Tem-se então para $X = \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \mathcal{U}^0(2, \xi)$$

ou seja, todos os fibrados vectoriais holomorfos de dimensão 2 com determinante ξ sobre \mathbb{P}^1 são decomponíveis. Assim, a classificação destes fibrados sobre \mathbb{P}^1 fica reduzida à determinação dos fibrados linha. Basta então usar a sequência exponencial de feixes 1.7 cuja sequência exacta longa associada nos dá

$$0 = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$$

Pela dualidade de Poincaré a classe de Chern determina um isomorfismo entre as classes de isomorfismo de fibrados linha sobre \mathbb{P}^1 e $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, portanto $\text{Pic}(\mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) = \mathbb{Z}$. Não é difícil ver que um gerador de $\text{Pic}(\mathbb{P}^1)$ é o fibrado linha L_0 definido pelas funções de transição $\{\phi_{01}(z) = z\}$ na cobertura $\{U_0 = \mathbb{C}, U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}\}$ de \mathbb{P}^1 . Temos então que todos os fibrados de dimensão 2 sobre \mathbb{P}^1 se podem escrever de forma única como $\mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2)$ com $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{Z}$ em que $\mathcal{O}(n) = L_0^n$.

Em geral, para qualquer dimensão, todos os fibrados vectoriais sobre \mathbb{P}^1 são decomponíveis numa soma de fibrados linha, resultado que se deve a Grothendieck ("Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann", Amer.J.Math.79, 1957).

De acordo com a identificação já anteriormente sugerida vem

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \mathcal{U}^0(2, \xi) = \text{Variedade de Kummer} = \text{Pic}(\mathbb{P}^1) / \mathbb{Z}_2$$

onde a acção de \mathbb{Z}_2 envia L em L^{-1} . Logo $\mathcal{U}(2, \xi) = \mathbb{Z} / \mathbb{Z}_2$ onde $x \sim -x$, ou seja

$$\mathcal{U}(2, \xi) \cong \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Consideremos agora o caso $g = 1$.

Comecemos pelo caso não estável não decomponível:

$\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L) \xrightarrow{1-1} \mathbb{P}^n$ com $n = h^1(X, L^2\xi^{-1}) - 1 = h^0(X, L^{-2}\xi) - 1$ pela dualidade de Serre ($K = \mathcal{O}$).

Como $\text{deg}(L^{-2}\xi) = -2\text{deg}L + \text{deg}\xi \leq 0$ vem $h^0(X, L^{-2}\xi) = 0$ a não ser que $\xi = L^2$, caso em que $H^0(X, L^{-2}\xi) = H^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Ou seja

$$\mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L) = \begin{cases} \mathbb{P}^0 = \text{um ponto} & \text{se } L^2 = \xi \\ \emptyset & \text{se } L^2 \neq \xi \end{cases}$$

Isto significa que a 3ª parcela na decomposição

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \mathcal{U}^S(2, \xi) \cup \mathcal{U}^0(2, \xi) \cup \bigcup_{\xi=L^2} \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L)$$

se descreve de acordo com duas possibilidades:

a) Se $\deg \xi$ é par, existem 4 soluções da equação $L^2 = \xi$ com ξ dado.

Por exemplo, as soluções de $L^2 = \mathcal{O}$ são os 4 pontos de ordem 2 em $Jac^0(X)$.

b) Se $\deg \xi$ é ímpar, não existem soluções porque não há fibrados de grau semi-inteiro.

Assim,

$$\mathcal{U}^{nS}(2, \xi) \setminus \mathcal{U}^0(2, \xi) = \begin{cases} 4 \text{ pontos} & \text{se } \deg \xi \text{ é par} \\ \emptyset & \text{se } \deg \xi \text{ é ímpar} \end{cases}$$

O caso decomponível resulta novamente da identificação $\mathcal{U}^0(2, \xi) = Pic(X) / \text{involução}$ com $Pic(X) = \bigcup_d Pic^d(X) \simeq \bigcup_d X$ pois $Jac(X) \simeq X \simeq Pic^d(X) \forall d \in \mathbb{Z}$ pelo Teorema de Abel-Jacobi para uma curva elíptica. Assim,

$\mathcal{U}^0(2, \xi) = \left(\bigcup_{d>0} Pic^d(X) \right) \cup Pic^0(X) / \text{involução}$, pois a involução troca o sinal do grau

(qualquer fibrado é equivalente a um de grau

≥ 0)

$$= \left(\bigcup_{d>0} X \right) \cup X / \mathbb{Z}_2, \text{ pois a involução envia } L \text{ em } L^{-1}, \text{ ou seja } x \text{ em } -x.$$

Não é difícil provar que $X / \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^1$ usando o revestimento ramificado $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $z \mapsto \mathcal{P}(z)$ dado pela função \mathcal{P} de Weierstrass.

Assim, $\mathcal{U}^0(2, \xi)$ é a união disjunta de infinitas curvas elípticas e de uma recta projectiva \mathbb{P}^1 .

Finalmente o caso estável $\mathcal{U}^S(2, \xi)$.

Por definição e usando o lema 33 tem-se $\frac{1}{2} \deg \xi - 1 \leq \text{div} E < \frac{1}{2} \deg \xi$, logo os elementos $E \in \mathcal{U}^S(2, \xi)$ verificam

$$\text{div} E = \left[\frac{(\deg \xi) + 1}{2} \right] - 1$$

L. Tu enuncia e demonstra em [15] que para uma curva elíptica X :

Teorema 36 *Qualquer fibrado E indecomponível de dimensão n e grau d é semi-estável. Além disso E é estável se e só se $(n, d) = 1$.*

Assim:

Se $(n, d) = 1$ (primos entre si), E é indecomponível se e só se é estável.

Se $(n, d) \neq 1$ então não há fibrados estáveis.

No nosso caso ($n = 2$) tem-se:

a) Se $d = \deg E = \deg \xi$ é par então $\mathcal{U}^S(2, \xi) = \emptyset$.

b) Se d é ímpar então $\mathcal{U}(2, \xi) = \mathcal{U}^S(2, \xi) \cup \mathcal{U}^0(2, \xi)$

(já vimos que $\mathcal{U}^{nS}(2, \xi) \setminus \mathcal{U}^0(2, \xi) = \emptyset$)

Finalmente, o teorema de Atiyah [2] (Teorema 7) diz que para uma curva elíptica X , os fibrados indecomponíveis de grau fixo $\mathcal{U}^{\text{indéc}}(2, d)$ estão em correspondência biunívoca com

a própria curva de forma a que a aplicação

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{U}^{indec}(2, d) &\longrightarrow \text{Pic}^d(X) \\ E &\longmapsto \det E \end{aligned}$$

corresponde à aplicação $H : X \longrightarrow X$ dada por $H(x) = hx = x + \dots + x$ (h vezes) onde $h = (n, d)$.

Assim, pelo Teorema de L. Tu, quando fixamos o determinante temos, no caso de d ser ímpar,

$$\det^{-1}(\xi) = \mathcal{U}^S(2, \xi) = 1 \text{ ponto}$$

já que se trata de um isomorfismo, e, no caso de d ser par

$$\det^{-1}(\xi) = \bigcup_{\xi=L^2} \mathcal{U}^{nS}(2, \xi, L) = 4 \text{ pontos}$$

tratando-se neste caso de uma aplicação de grau 4.

Conclusão:

$$\mathcal{U}(2, \xi) = \begin{cases} \mathcal{U}^0(2, \xi) \cup 4 \text{ pontos} = \left(\bigcup_{d>0} X \right) \cup \mathbb{P}^1 \cup 4 \text{ pontos} & \text{se } d = 2k \\ \mathcal{U}^0(2, \xi) \cup \mathcal{U}^S(2, \xi) = \left(\bigcup_{d>0} X \right) \cup \mathbb{P}^1 \cup 1 \text{ ponto} & \text{se } d = 2k + 1 \end{cases}$$

Capítulo 2

Classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial no caso

$$g = 2$$

2.1 Divisores

Definição 37 *Seja X uma superfície de Riemann. Um divisor D em X é uma aplicação $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ com suporte localmente finito, ou seja, $\forall K \subset X$ compacto, o conjunto $\{p \in K \mid D(p) \neq 0\}$ é finito. Escrevemos*

$$D = \sum_{p \in X} D(p) p$$

Se X for compacta então a soma é finita.

Ao conjunto $\{p \in X \mid D(p) \neq 0\}$ chamamos suporte de D e escrevemos $\text{supp}(D)$

Definição 38 *Dizemos que um divisor é efectivo se $D(p) \geq 0 \forall p \in X$ e que, dados dois divisores D_1 e D_2 , $D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2$ é efectivo.*

Se f for uma função meromorfa definida numa vizinhança U de um ponto $p \in X$, e se z for uma coordenada local em U com $z(p) = 0$, escrevemos

$$\text{ord}_p(f) = \begin{cases} \infty & \text{se } f \equiv 0 \text{ perto de } p \\ k & \text{se } f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \quad (k \in \mathbb{Z}), a_k \neq 0 \end{cases}$$

Se s for uma secção meromorfa não trivial de um fibrado vectorial holomorfo E sobre uma

superfície de Riemann X , para cada $p \in X$ podemos escolher uma vizinhança coordenada (U, z) , com $z(p) = 0$ tal que a composição com a trivialização $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^m$ fique definida por $\varphi_U \circ s(x) = (x, f(x))$, $x \in U$, em que f é um n -uplo de funções meromorfas em U .

Vai existir um número inteiro k tal que $f = z^k g$, em que g é um n -uplo de funções holomorfas perto de p e $g(p) \neq 0$. Definimos $k = \text{ord}_p(s)$.

Definição 39 *Se s for uma secção meromorfa de um fibrado vectorial holomorfo E , definimos o divisor de s e denotamos por (s) , o divisor*

$$(s) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(s) p$$

Qualquer divisor pode ser obtido como divisor de uma secção meromorfa de um certo fibrado.

Em particular numa superfície de Riemann X seja $D = \sum_{p \in X} n_p p$ um divisor e sejam $p, q \in S = \text{supp}(D)$ com sistemas de coordenadas locais $\{U_p, z_p\}$, $z_p(p) = 0$, e $\{U_q, z_q\}$, $z_q(q) = 0$, escolhidos de forma a ter $U_p \cap U_q = \emptyset$ se $p \neq q$. Seja $U_* = X - S$ e consideremos $f_* \equiv 1$ em U_* , $f_p = z_p^{n_p}$ em U_p . Sejam $g_{ij} = f_i/f_j$, $i, j \in I = \{*\} \cup S$ funções definidas em $U_i \cap U_j$. Tem-se então que, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, g_{ij} são holomorfas e nunca se anulam nestas intersecções. Mais, se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ tem-se $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Conclusão $\{g_{ij}\}$ constitui um sistema de funções de transição de um fibrado linha que denotaremos por L_D . Além disso as funções $\{f_i\}_{i \in I}$ definem uma secção meromorfa de L_D . Denotaremos essa secção por s_D . Vem então $(s_D) = D$.

Facilmente se verifica que esta identificação não depende da escolha das coordenadas locais. Obter-se-ão fibrados linha L_D isomorfos.

Passamos então a poder usar uma notação alternativa para os espaços de cohomologia $H^q(X, L_D) = H^q(X, D)$ e respectivas dimensões $h^q(L_D) = h^q(D)$.

Observação 40 *Uma secção meromorfa não constante s de um fibrado vectorial holomorfo E é holomorfa se e só se (s) é efectivo.*

Observação 41 *Se $\pi : L \rightarrow X$ for um fibrado linha e se s_0 e s_1 forem duas secções meromorfas de L (com $s_0 \neq 0$), então existe uma função meromorfa f em X tal que $s_1 = f s_0$.*

Definição 42 *Dois divisores D_1 e D_2 dizem-se **linearmente equivalentes** se existe uma função meromorfa f em X , $f \neq 0$, tal que $(f) = D_1 - D_2$. Escrevemos $D_1 \sim D_2$.*

Lema 43 *Dois divisores D_1 e D_2 são linearmente equivalentes se e só se L_{D_1} e L_{D_2} forem isomorfos [8].*

Definição 44 *Um **sistema linear completo** $|D|$ associado um divisor D é o conjunto de divisores efectivos linearmente equivalentes a D .*

$|D|$ tem uma estrutura de espaço projectivo que está relacionada com o espaço vectorial $H^0(X, L_D)$. Basta observar que para $\hat{D} \geq 0$ vem $\hat{D} \sim D$ se existe uma função meromorfa

f em X tal que $\text{ord}_p(f) \geq -\text{ord}_p(s_D) \forall p \in X$. A secção $f s_D \in H^0(X, L_D)$. Tem-se $(f s_D) = (\lambda f s_D)$ para qualquer constante λ , e $(f s_D) \in |D|$ e portanto existe uma correspondência biunívoca entre $|D|$ e $\mathbb{P}H^0(X, L_D)$.

Em geral um **sistema linear** é um subespaço de um sistema linear completo $|D|$ que corresponde a um subespaço linear de $\mathbb{P}H^0(X, L_D)$.

Definição 45 *Seja Q um sistema linear numa superfície de Riemann X . $p \in X$ diz-se um **ponto base** de Q se para qualquer divisor $E \in Q$ se tem $E \geq p$.*

Proposição 46 *Seja D um divisor numa superfície de Riemann compacta X . Então $p \in X$ é um ponto base de $|D|$ se e só se $h^0(D - p) = h^0(D)$. Logo, $|D|$ não tem pontos base se e só se $h^0(D - p) = h^0(D) - 1$ para todo o $p \in X$. Diz-se neste caso que o divisor é **amplo** [8].*

Se pudermos mergulhar holomorficamente uma superfície de Riemann X num espaço projectivo, podemos através de intersecções com subvariedades apropriadas de \mathbb{P}^n obter divisores em X . Vamos ver que a recíproca também é verdadeira. Ou seja, dado um divisor D , podemos a partir dele definir um mergulho holomorfo de X num espaço projectivo.

Definição 47 *Seja X uma superfície de Riemann. Uma aplicação $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é holomorfa num ponto $p \in X$ se existem funções holomorfas g_0, g_1, \dots, g_n definidas numa vizinhança de p , não sendo todas identicamente nulas em p , tal que $\phi(x) = [g_0(x) : g_1(x) : \dots : g_n(x)]$ para todo o x nessa vizinhança. ϕ é holomorfa se for holomorfa em todos os pontos de X .*

Como numa superfície de Riemann compacta as únicas funções globalmente holomorfas são as constantes, podemos usar funções meromorfas para definir uma aplicação holomorfa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$. Mais, toda a aplicação deste tipo pode ser definida desta forma.

Lema 48 *Se $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ forem funções meromorfas em X , não todas identicamente nulas, a aplicação $\phi_f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ definida por $\phi_f(p) = [f_0(p) : f_1(p) : \dots : f_n(p)]$ em todos os pontos que não sejam polos de nenhum dos f_i nem zeros de todos em simultâneo, estende-se a uma aplicação holomorfa definida em todo o X [8].*

Lema 49 *A cada aplicação $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ podemos associar um sistema linear $|\phi|$ independentemente da escolha das funções f_0, f_1, \dots, f_n que definem ϕ [8].*

Proposição 50 *Seja $Q \subset |D|$ um sistema linear sem pontos base com dimensão projectiva n numa superfície de Riemann compacta X . Então existe $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $Q = |\phi|$. Além disso ϕ é único a menos da escolha de coordenadas em \mathbb{P}^n [8].*

Dado um divisor D tal que $|D|$ não tem pontos base, denotaremos por ϕ_D a aplicação associada ao sistema linear completo $|D|$.

Proposição 51 *Seja X uma superfície de Riemann e seja D um divisor em X tal que $|D|$ não tenha pontos base. Então ϕ_D é um mergulho holomorfo, se e só se, para quaisquer pontos p e q de X , se tem $h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2$. Diz-se neste caso que o divisor é **muito amplo** [8].*

2.2 Extensões de fibrados linha e fibrados semi-estáveis

No que se segue consideraremos X superfície de Riemann compacta com género $g \geq 2$. Denotaremos por J^1 a componente de $Pic(X)$ (fibrados linha sobre X) dos fibrados linha de grau 1.

Teorema 52 *Qualquer fibrado E de dimensão 2 e determinante trivial pode ser obtido como extensão de um fibrado linha de grau $g - 1$ da forma LL_x^{-1} para algum $x \in X$ e $L \in J^g$.*

Observação 53 *Este resultado melhora a estimativa para $divE$ conseguida com o lema 33 já que garante $divE \geq 1 - g$ no caso em que $deg E = 0$.*

Demonstração:

Pelo teorema de Riemann-Roch vem

$$\begin{aligned} h^0(L \otimes E) &= h^1(L \otimes E) + \deg(L \otimes E) + 2(1 - g) \geq \\ &\geq 2 \deg L + \deg E + 2(1 - g) = 2 \deg L + 2 - 2g = 2 \end{aligned}$$

e portanto $h^0(L \otimes E) \geq 2$.

Observando que $H^0(X, L \otimes E) = H^0(X, Hom(L^{-1}, E))$, tem-se que, se $E \neq L^{-1} \oplus L^{-1}$, o morfismo de avaliação

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, Hom(L^{-1}, E)) & \xrightarrow{av_x} & Hom(L^{-1}, E)_x \\ s & \longmapsto & s(x) \end{array}$$

não pode ser um isomorfismo para todo o $x \in X$.

Se assim fosse, vinha $h^0(L \otimes E) = 2$, logo existiriam secções s_1 e s_2 de $L \otimes E$ tais que (s_1, s_2) seria uma base de $H^0(X, L \otimes E)$ e $(s_1(x), s_2(x))$ uma base de \mathbb{C}^2 para todo o $x \in X$, ou seja s_1 e s_2 nunca se anulariam simultaneamente em nenhum ponto de X e portanto $L \otimes E$ teria uma secção holomorfa que não se anula em nenhum ponto. Mas isso significa que $L \otimes E$ seria trivial, ou seja $E = L^{-1} \oplus L^{-1}$.

Logo, existe $s \in H^0(X, L \otimes E)$ não nula tal que $s(x) = 0$ para algum $x \in X$.

Consideremos então a seqüência exacta curta de feixes sobre X

$$0 \longrightarrow L_x^{-1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$$

Vamos tensorizá-la com $L \otimes E$ e passar à seqüência exacta de cohomologia:

$$0 \longrightarrow H^0(X, L_x^{-1}L \otimes E) \longrightarrow H^0(X, L \otimes E) \longrightarrow H^0(X, L \otimes E)_x \longrightarrow \dots$$

Então $\text{Ker}(av_x) = \text{Im}[H^0(X, L_x^{-1}L \otimes E) \longrightarrow H^0(X, L \otimes E)]$ e portanto, como existe $s \neq 0$ tal que $s \in \text{Ker}(av_x)$, vem

$$H^0(X, L_x^{-1}L \otimes E) \neq 0 \Leftrightarrow H^0(X, Hom(L_x L^{-1}, E)) \neq 0$$

Ou seja E pode ser definido como extensão de LL_x^{-1}

$$0 \longrightarrow L_x L^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow LL_x^{-1} \longrightarrow 0$$

■

Já vimos no Teorema 27 que a cada elemento $\sigma \in H^1(X, L^{-2})$ corresponde um fibrado E_σ de determinante trivial que é extensão de L por L^{-1} , ou seja

$$0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow E_\sigma \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Lema 54 *Se tivermos $0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$, $L \in J^1$ e a extensão for não trivial, então E é semi-estável.*

Demonstração:

Basta ver que se L' for um fibrado linha de grau positivo vem $Hom(L', E) = \{0\}$. Se assim não fosse a composição do homomorfismo não nulo $\varphi : L' \rightarrow E$ com a sobrejecção $E \rightarrow L$ resultaria num homomorfismo não nulo $L' \rightarrow L$ e vinha $\deg L' = 1$. Mas se $\deg L' = 1$ então L e L' seriam isomorfos e E seria trivial. ■

Então se $L \in J^1$ e $\sigma \neq 0$, a propriedade universal do espaço moduli $\mathcal{U}^{SS}(2, \mathcal{O})$ dos fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial sobre X [10] permite obter uma aplicação holomorfa

$$\Psi : \mathbb{P}H^1(X, L^{-2}) \rightarrow \mathcal{U}^{SS}(2, \mathcal{O}) \quad (2.1)$$

No 1º capítulo vimos que existe uma **decomposição** de E em fibrados linha que denotámos por (L_1, L_2) no caso da dimensão 2, e que é o mesmo que dizer que E se define como extensão de L_2 por L_1 .

Se E for semi-estável então existe uma filtração $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 = E$ chamada filtração de Jordan-Holder tal que todos os quocientes E_i/E_{i-1} são estáveis e têm o mesmo declive de E , $\mu(E_i/E_{i-1}) = \mu(E)$. Define-se então o fibrado $Gr(E) = E_1 \oplus E/E_1$ e prova-se que não depende da filtração mas apenas de E . Isto deve-se ao facto dos fibrados semi-estáveis de declive μ constituírem uma categoria \mathfrak{C}_μ abeliana e artiniana.

Definição 55 *Dizemos que dois fibrados semi-estáveis E e E' são S – equivalentes se*

$$Gr(E) \simeq Gr(E')$$

Por exemplo, quando dizemos que, para $L \in J^1$, $0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$ pode ser dado como extensão de $j \in J^0$ por j^{-1} , estamos a dizer que E é S – equivalente a $j \oplus j^{-1}$.

Denotaremos por $U(2, 0)$ o conjunto das classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e grau 0 sobre X e por S o subconjunto das classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial. Veremos mais tarde que $U(2, 0)$ tem uma estrutura de variedade algébrica da qual S é subvariedade isomorfa a \mathbb{P}^3 .

Lema 56 *Seja E extensão de $L \in J^1$ por L^{-1} : $0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$ e $j \in J^0$. E é S – equivalente a $j \oplus j^{-1}$, e portanto não estável, se e só se*

$$\sigma(E) \in Ker [H^1(X, L^{-2}) \longrightarrow H^1(X, L^{-2}L_x)] \text{ para algum } x \in X$$

Demonstração:

Seja então $j \in J^0$. Como $H^0(X, Hom(j, L^{-1})) = 0$, então $H^0(X, Hom(j, E)) \neq 0$ se e só se

$H^0(X, \text{Hom}(j, L)) \neq 0$ e se puder fazer o respectivo levantamento. Mas $H^0(X, \text{Hom}(j, L)) \neq 0 \iff H^0(X, Lj^{-1}) \neq 0$. Seja então s uma secção não trivial de Lj^{-1} . Se s não se anulasse em nenhum ponto vinha $\deg(s) = 0 \iff \deg Lj^{-1} = 0$ o que seria uma contradição com o facto de se ter $L \in J^1$ e $j \in J^0$. Por outro lado se s se anulasse em pelo menos dois pontos vinha $\deg(s) \geq 2$ e cair-se-ia novamente em contradição. Conclusão, Lj^{-1} tem que ser da forma L_x para algum $x \in X$. E portanto $H^0(X, \text{Hom}(j, L)) \neq 0$ se e só se j for da forma LL_x^{-1} para algum $x \in X$.

Consideremos então a aplicação natural $\rho : LL_x^{-1} \rightarrow L$.

Temos então um diagrama comutativo de fibrados vectoriais dado por

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(L, L^{-1}) & \longrightarrow & \text{Hom}(L, E) & \longrightarrow & \text{Hom}(L, L) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(LL_x^{-1}, L^{-1}) & \longrightarrow & \text{Hom}(LL_x^{-1}, E) & \longrightarrow & \text{Hom}(LL_x^{-1}, L) \longrightarrow 0 \end{array}$$

em que as sequências horizontais são exactas e as verticais são induzidas por ρ .

Ao passar para as sequências exactas de cohomologia obtemos outro diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \text{Hom}(L, E)) & \longrightarrow & H^0(X, \text{Hom}(L, L)) & \longrightarrow & H^1(X, \text{Hom}(L, L^{-1})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, E)) & \longrightarrow & H^0(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, L)) & \longrightarrow & H^1(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, L^{-1})) \end{array}$$

O homomorfismo ρ é um elemento de $H^0(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, L))$. Por se ter uma sequência exacta vai existir um levantamento de ρ em $H^0(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, E))$ se e só se a sua imagem em $H^1(X, \text{Hom}(LL_x^{-1}, L^{-1}))$ for 0. Mas por outro lado ρ é imagem da aplicação identidade de L , e esta, de acordo com a observação 28, tem por imagem em $H^1(X, \text{Hom}(L, L^{-1}))$ o elemento $\sigma(E) \in H^1(X, L^{-2})$ que classifica E como extensão de L por L^{-1} .

A conclusão sai portanto da comutatividade do diagrama.

■

Vamos agora considerar $D = K \otimes L^2$, em que K é o divisor canónico, e a aplicação associada

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\rightarrow \mathbb{P}H^0(X, D)^* && \simeq \mathbb{P}H^1(X, L^{-2}) \\ x &\mapsto (f_1, \dots, f_N) && \mapsto [f_1(x) : \dots : f_N(x)] \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Riemann-Roch

$$\begin{aligned} h^0(D - p) &= h^0(K - D + p) + \deg(D - p) + 1 - g = \\ &= h^0(L^{-2}L_p) + 2g - 1 + 1 - g = \\ &= h^0(L^{-2}L_p) + g \end{aligned}$$

Como $\deg(L^{-2}L_p) = -2 + 1 = -1 < 0$ vem $h^0(L^{-2}L_p) = 0$ e portanto $h^0(D - p) = g$

Por outro lado $h^0(D) = h^0(L^{-2}) + \deg D + 1 - g = 2g + 1 - g$ e portanto $h^0(D) - 1 = g$.

Ou seja D não tem pontos base e portanto ϕ_D fica bem definida.

Teorema 57 *Seja $L \in J^1$, $D = K \otimes L^2$ e $\mathcal{U}^S(2, \mathcal{O})$ o subconjunto de $\mathcal{U}^{SS}(2, \mathcal{O})$ constituído pelos fibrados estáveis de dimensão 2 e determinante trivial. Então, sendo Ψ a aplicação*

dada em 2.1, tem-se

$$\mathcal{U}^{SS}(2, \mathcal{O}) \setminus \mathcal{U}^S(2, \mathcal{O}) = \Psi \circ \phi_D(X)$$

Demonstração:

Seja E extensão de L^{-1} por $L \in J^1$, ou seja $0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$. E é estável se e só se $H^0(X, \text{Hom}(j, E)) = 0$ sempre que $\deg j = 0$ (Lema 54). Ou, o que é equivalente, E não é estável se e só se for extensão de $j \in J^0$ por j^{-1} . Mas, pelo lema 56 isto é equivalente a ter

$$\sigma(E) \in \text{Ker} [H^1(X, L^{-2}) \rightarrow H^1(X, L^{-2}L_x)] \text{ para algum } x \in X.$$

Como pela dualidade de Serre

$$\text{Ker} [H^1(X, L^{-2}) \rightarrow H^1(X, L^{-2}L_x)] = \text{Ker} [H^0(X, K \otimes L^2)^* \rightarrow H^1(X, K \otimes L^2 \otimes L_x^{-1})^*]$$

vamos tentar perceber como é que fica definida a aplicação

$$H^0(X, K \otimes L^2)^* \rightarrow H^0(X, K \otimes L^2 \otimes L_x^{-1})^*$$

Comecemos por considerar mais uma vez a sequência exacta

$$0 \rightarrow L_x^{-1} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}_x \rightarrow 0$$

Depois de a tensorizar com o fibrado $K \otimes L^2$ e passar à sequência na cohomologia obtemos

$$0 \rightarrow H^0(X, K \otimes L^2 \otimes L_x^{-1}) \xrightarrow{\otimes s_x} H^0(X, K \otimes L^2) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \dots$$

onde $s_x \in H^0(X, L_x)$ é a secção que define o divisor x e portanto $s_x(x) = 0$. Conclusão, $\text{Ker} [H^0(X, K \otimes L^2)^* \rightarrow H^0(X, K \otimes L^2 \otimes L_x^{-1})^*]$ são os funcionais $\varphi \in H^0(X, K \otimes L^2)^*$ tais que $\varphi(s \otimes s_x) = 0 \quad \forall s \in H^0(X, K \otimes L^2)$ sendo portanto aqueles que ficam definidos pelo valor que a secção toma em x . Ora

$$\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}H^0(X, D)^*$$

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \phi_D(x) : \mathbb{P}H^0(X, D) \rightarrow \mathbb{C} \\ & & s \mapsto s(x) \end{array}$$

e portanto

$$\sigma(E) \in \text{Ker} [H^1(X, L^{-2}) \rightarrow H^1(X, L^{-2}L_x)] \text{ para algum } x \in X \iff \sigma(E) \in \phi_D(X).$$

■

Consideremos agora o caso em que a superfície de Riemann X tem género $g = 2$.

Seja E um fibrado semi-estável de dimensão 2 e determinante trivial e consideremos o conjunto

$$C_E = \{L \in J^1 \mid H^0(X, L \otimes E) \neq 0\}$$

Teorema 58 C_E depende apenas da classe de S – equivalência de E e se E for S – equivalente a $j \oplus j^{-1}$, com $j \in J^0$, tem-se que

$$L \in C_E \iff L = jL_x \quad \text{ou} \quad L = j^{-1}L_x$$

Demonstração:

Se E for S – equivalente a $j \oplus j^{-1}$, com $j \in J^0$ e portanto ter a forma

$$0 \longrightarrow j^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow j \longrightarrow 0$$

considera-se a sequência exacta

$$0 \longrightarrow H^0(X, Lj^{-1}) \longrightarrow H^0(X, L \otimes E) \longrightarrow H^0(X, Lj) \longrightarrow H^1(X, Lj^{-1})$$

Se $L \in C_E$ então $H^0(X, L \otimes E) \neq 0$ e portanto ou $H^0(X, Lj^{-1}) \neq 0$ ou $H^0(X, Lj) \neq 0$. Isto tem como resultado, ainda segundo a demonstração do lema 56, que ou $L = jL_x$ ou $L = j^{-1}L_x$. Reciprocamente, se $H^0(X, Lj^{-1}) \neq 0$ ou $H^0(X, Lj) \neq 0$ vem: no 1º caso $L \in C_E$ de imediato, no caso de se ter $H^0(X, Lj^{-1}) = 0$ e $H^0(X, Lj) \neq 0$ vem

$$h^1(X, Lj^{-1}) \stackrel{R-R}{=} h^0(X, Lj^{-1}) - \deg(Lj^{-1}) - 1 + 2 = 0$$

e portanto resulta da sequência exacta que $L \in C_E$. ■

Observação 59 Como consequência do Teorema de Riemann-Roch, da dualidade de Serre e de se ter $E \simeq E^*$ vem que C_E é invariante para a involução em J^1 definida por $\xi \mapsto K \otimes \xi^{-1}$.

Lema 60 Seja X de género $g = 2$ e E fibrado semi-estável de dimensão 2 e determinante trivial sobre X . Se $L \in J^1$ for tal que $H^0(X, L \otimes E) \neq 0$ então existe uma extensão não trivial

$$0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow E' \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

tal que E' é S -equivalente a E .

Demonstração:

Se E for não estável, como $H^0(X, L \otimes E) \neq 0$ vem E S -equivalente a $LL_x^{-1} \oplus L_xL^{-1}$ para algum $x \in X$ pelo teorema 58. Seja E' uma extensão não trivial em correspondência com o núcleo da aplicação $H^1(X, L^{-2}) \longrightarrow H^1(X, L^{-2}L_x)$ então, pelo lema 56 vem que E' é S -equivalente a $LL_x^{-1} \oplus L_xL^{-1}$ e portanto S -equivalente a E .

Se E for estável basta considerar o próprio E . ■

Lema 61 Seja $0 \longrightarrow \xi^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow \xi \longrightarrow 0$ extensão não trivial de $\xi \in J^1$. Então

$$C_E = \{\xi\} \cup \{K \otimes \xi^{-1}\} \cup \{L \in J^1 \mid \sigma(E) \in \text{Ker} [H^1(X, \xi^{-2}) \longrightarrow H^1(X, \xi^{-1}L)]\}$$

Demonstração:

Consideremos a sequência exacta

$$0 \longrightarrow H^0(X, L \xi^{-1}) \longrightarrow H^0(X, L \otimes E) \longrightarrow H^0(X, L \xi)$$

$L \in C_E$ se e só se $H^0(X, L \xi^{-1}) \neq 0$ ou, se $H^0(X, L \xi^{-1}) = 0$ se tem $H^0(X, L \xi) \neq 0$ e existe o respectivo levantamento. O 1º caso resulta em $L = \xi$. Quanto à 2ª possibilidade observemos que, nas condições dadas, vem

$$h^0(X, L \xi) \stackrel{R-R}{=} h^0(X, K \otimes \xi^{-1} L^{-1}) + \deg(L \xi) + 1 - 2$$

portanto ou $L = K \otimes \xi^{-1}$ ou $\sigma(E) \in \text{Ker} [H^1(X, \xi^{-2}) \longrightarrow H^1(X, \xi^{-1} L)]$. Basta seguir os passos da demonstração do Lema 56 e o resultado sai da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, \text{Hom}(\xi, E)) & \longrightarrow & H^0(X, \text{Hom}(\xi, \xi)) & \longrightarrow & H^1(X, \text{Hom}(\xi, \xi^{-1})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \text{Hom}(L^{-1}, E)) & \longrightarrow & H^0(X, \text{Hom}(L^{-1}, \xi)) & \longrightarrow & H^1(X, \text{Hom}(L^{-1}, \xi^{-1})) \end{array}$$

■

2.3 O divisor 2Θ e a sua relação com as extensões

Nesta secção chegamos finalmente à construção de um fibrado sobre a jacobiana, cujas fibras estão em estreita ligação com as extensões. Ora, sendo a jacobiana uma variedade de dimensão complexa 2 (uma vez que $g = 2$), acrescentamos ao estudo que tem vindo a ser feito sobre curvas complexas alguns resultados sobre superfícies complexas. Precisamos então de definir um divisor numa variedade complexa de dimensão $m > 1$, e, juntamente com alguns preliminares que ajudem à sua compreensão, enunciar o Teorema de Riemann-Roch para fibrados linha sobre superfícies, já que ajuda a justificar um passo fundamental na construção que pretendemos fazer.

Começemos por generalizar a definição de divisor a uma variedade complexa M de dimensão $m > 1$, recordando que uma subvariedade analítica $V \subset M$ de dimensão $n - 1$ é uma hipersuperfície se, para cada ponto $p \in V \subset M$, existe uma vizinhança em que V é dada como o conjunto de zeros de uma função holomorfa f . Assim,

Definição 62 *Um divisor D em M é uma combinação linear formal localmente finita*

$$D = \sum a_i V_i$$

de hipersuperfícies analíticas irredutíveis de M . O divisor D diz-se efectivo se $a_i \geq 0 \forall i$.

Para $p \in V$ e f função de definição local de V tem-se que, para g função holomorfa numa vizinhança de p , $ord_{V,p}(g)$ é o maior inteiro a tal que se possa escrever $g = f^a h$ no anel $\mathcal{O}_{M,p}$, com $h \neq 0$ em p . Mas este número vai ser independente de p logo fica bem definida $ord_V(g)$ e consequentemente o divisor de uma secção meromorfa de um fibrado sobre M .

É válido tudo o que foi referido para divisores sobre superfícies de Riemann no que diz respeito à sua correspondência com os fibrados linha sobre a variedade M .

Definiremos agora a intersecção de divisores e enunciaremos a fórmula de adjunção:

Definição 63 *O número de intersecção de dois divisores é dado por*

$$D \cdot D' = L_D \cdot L_{D'} = \int_M \varphi \wedge \psi$$

com φ representante de $c_1(L_D)$ e ψ representante de $c_1(L_{D'})$, onde L_D designa o fibrado correspondente a D [4](p.470). Prova-se que fica bem definido [4](p.59), ou seja, que não depende da escolha dos representantes.

Definimos uma curva C numa superfície M como sendo um divisor efectivo em M .

Se C for uma curva suave e irredutível de género g em M e denotarmos por K_C e K_M os respectivos fibrados linha canónicos, então temos [4]

Fórmula de Adjunção

$$K_M \cdot C + C \cdot C = 2g_C - 2$$

Definição 64 *Para E fibrado vectorial holomorfo sobre uma variedade complexa compacta M a característica de Euler holomorfa de E é dada por*

$$\chi(E) = \sum (-1)^p h^p(M, E)$$

Denotando por \mathcal{O}_M o fibrado trivial sobre M , temos

Teorema 65 (*Riemann-Roch para fibrados linha sobre superfícies*)[4](p.471)

Seja M uma variedade complexa compacta de dimensão 2 e L um fibrado linha holomorfo sobre M . Então

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{L \cdot L - L \cdot K_M}{2}$$

Teorema 66 (*Dualidade de Kodaira-Serre para fibrados linha*)[4](p.153)

Seja M uma variedade complexa compacta de dimensão m e L um fibrado linha holomorfo sobre M . Então

$$H^q(M, L) \simeq H^{n-q}(M, K_M \otimes L^{-1})^*$$

Teorema 67 (*Kodaira-Nakano*)[4](p.154)

Se $L \rightarrow M$ for um fibrado linha positivo sobre uma variedade complexa compacta M de dimensão m . Então

$$H^q(M, \Omega^p(L)) = 0 \text{ para } p + q > m$$

e dualizando, se $L \rightarrow M$ for um fibrado linha negativo vem $H^q(M, \Omega^p(L)) = 0$ para $p + q < m$

Consideremos então uma superfície de Riemann X compacta de género 2 e J , J^1 as componentes do grupo de Picard constituídas respectivamente pelos fibrados linha de graus 0 e 1 sobre X .

X está naturalmente mergulhada em J^1 . Para ver isto pensemos no fibrado linha sobre $X \times X$ associado ao divisor diagonal, ou seja aos pontos da forma (x, x) . Denotaremos este fibrado linha por L_Δ . Podemos interpretá-lo como uma família de fibrados linha $\{L_x\}_{x \in X}$ sobre X parametrizada por X . Desta forma, recorrendo à propriedade universal de J^1 , garantimos a existência de um morfismo

$$t : X \rightarrow J^1$$

tal que $t(x) = L_x$, que é naturalmente um mergulho.

Observamos mais uma vez que J^1 é uma variedade de dimensão 2 e que portanto o mergulho t define um divisor não singular em J^1 . Denotaremos este divisor por Θ , e o seu fibrado linha associado por L_Θ . Tem-se

$$\Theta = \{L \in J^1 \mid h^0(L) \geq 1\}$$

Seja K o divisor canónico sobre X .

Lema 68 $t^*L_\Theta \approx K$

Demonstração:

Basta observar que t^*L_Θ é simplesmente o fibrado normal de X em J^1 para o mergulho t . Considera-se então a sequência exacta

$$0 \rightarrow (t^*L_\Theta)^{-1} \rightarrow V \rightarrow K \rightarrow 0$$

em que V é a imagem recíproca por t do fibrado cotangente sobre J^1 . Mas como J^1 é uma variedade abeliana V é trivial. Basta então considerar $\det V$ para obter o resultado. ■

Observemos que se tem uma involução natural em J^1 dada por $\iota(\xi) = K \otimes \xi^{-1}$.

Lema 69 (i) Θ é invariante para a involução ι e existe um levantamento para L_Θ da acção de ι em J^1 . Tem-se $\iota^*(L_\Theta) \approx L_\Theta$;

(ii) L_Θ é amplo ; Tem-se $H^i(J^1, L_\Theta^n) = 0$ para $i \geq 1, n \geq 1$ e $h^0(J^1, L_\Theta^n) = n^2$, para $n \geq 1$.

(iii) Seja $\eta \in J^1$ e $Q_\eta : J^1 \longrightarrow J^1$ o morfismo definido por $Q_\eta(\xi) = \xi^2 \otimes \eta^{-1}$. Então $Q_\eta^*(L_\Theta) \otimes L_\Theta^{-2}$ é algebricamente equivalente a L_Θ^2 .

Demonstração:

(i) $h^0(K \otimes L_x^{-1}) \stackrel{D.S.}{=} h^1(L_x)$ e $h^1(L_x) \stackrel{R.R}{=} h^0(L_x) - 1 - 1 + 2 = 1$. Logo $h^0(K \otimes L_x^{-1}) = 1$.

(ii) L_Θ ser amplo é um resultado clássico [7](Teo.Lefchetz p.85) e a anulação das cohomologias positivas justifica-se com a dualidade de Kodaira-Serre e com o teorema de Kodaira-Nakano, já que, por K_{J^1} ser o fibrado trivial, vem

$$h^2(J^1, L_\Theta^n) = h^0(J^1, K_{J^1} \otimes L_\Theta^{-n}) = h^0(J^1, L_\Theta^{-n}) = 0$$

$$h^1(J^1, L_\Theta^n) = h^1(J^1, K_{J^1} \otimes L_\Theta^{-n}) = h^1(J^1, L_\Theta^{-n}) = h^1(J^1, \Omega^0(L_\Theta^{-n})) = 0$$

porque L_Θ^{-n} é negativo.

Quanto a $h^0(J^1, L_\Theta^n)$ podemos calculá-la de forma indutiva usando a sequência exacta

$$0 \longrightarrow L_\Theta^{(n-1)} \longrightarrow L_\Theta^n \longrightarrow L_{\Theta|t(X)}^n \longrightarrow 0$$

e o facto de $h^0(J^1, L_{\Theta|t(X)}^n) = h^0(X, K^n)$ pelo lema 68.

(iii) Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} J^1 & \xrightarrow{f_\eta} & J \\ \downarrow Q_\eta & & \downarrow \psi_2 \\ J^1 & \xrightarrow{f_\eta} & J \end{array}$$

com $\psi_2(j) = j^2$, $j \in J$ e $f_\eta(\xi) = \xi \otimes \eta^{-1}$. Como corolário do Teorema do quadrado [7](p.34), vem que se L for um fibrado sobre J então $\psi_2^*(L)$ é algebricamente equivalente a L^4 . Logo vem $Q_\eta^*(L_\Theta)$ algebricamente equivalente a L_Θ^4 e portanto $Q_\eta^*(L_\Theta) \otimes L_\Theta^{-2}$ algebricamente equivalente a L_Θ^2 e amplo. ■

Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times J^1 & \xrightarrow{\tau} & J \times J^1 \\ p_X \downarrow & & \downarrow \mu = p_J \otimes p_{J^1} \\ X & \xrightarrow{t} & J^1 \end{array}$$

em que as aplicações representadas ficam definidas por:

- $\tau(x, \xi) = (L_x \otimes \xi^{-1}, \xi)$;
- $\mu(j, \xi) = j \otimes \xi$

Análogo ao que se passou com o mergulho t também o morfismo τ define um divisor, desta vez em $J \times J^1$. Denotaremos esse divisor por T . Como o diagrama é comutativo vem que $\mu^{-1}(t(X)) = \tau(X \times J^1)$ e portanto o fibrado linha associado ao divisor T não é mais do que $\mu^*(L_\Theta)$. Denotaremos este fibrado linha por L_T .

Lema 70 Consideremos a aplicação φ de $J \times X$ em J^1 definida por $(j, x) \mapsto j \otimes L_x$.

A imagem recíproca de L_Θ por esta aplicação define uma família de fibrados linha sobre X parametrizada por J , que a cada j faz corresponder um fibrado linha sobre X isomorfo a $K \otimes j^{-1}$.

Demonstração:

Seja $i_j : X \rightarrow J \times X$ a inclusão $x \mapsto (j, x)$ e consideremos a aplicação $\lambda_j = \varphi \circ i_j$ de X em J^1 dada por $\lambda_j : x \mapsto j \otimes L_x$. O que temos que demonstrar é o isomorfismo $i_j^* \varphi^* L_\Theta = \lambda_j^* L_\Theta \simeq K \otimes j^{-1}$ de fibrados linha sobre X para cada $j \in J$.

Pelo lema 68 podemos assumir $j \neq e$, e portanto $K \otimes j^{-1}$ fibrado linha de grau 2 sobre X não isomorfo a K . Então $h^0(K \otimes j^{-1}) = h^0(j) + 2 + 1 - 2 = 1$, o que significa que existe um único par de pontos a, b em X tais que $K \otimes j^{-1} \approx L_a \otimes L_b$. Por outro lado se $x \in X$ for tal que $\lambda_j(x) \in t(X)$ então $j \otimes L_x = L_y$ para algum $y \in X$, ou seja, $j = L_x^{-1} \otimes L_y \implies K \otimes j^{-1} \approx K \otimes L_y^{-1} \otimes L_x$. Mas pelo lema 69(i) vem que $K \otimes L_y^{-1} = L_z$ para algum $z \in X$, e portanto temos que ter $x = a$ ou $x = b$, o que significa que $\lambda_j^{-1}(\Theta) = \{a, b\}$. Mas $\deg(\lambda_j^*(L_\Theta)) = \deg(\lambda_e^*(L_\Theta)) = 2$ pelo lema 68, logo temos que ter $\lambda_j^*(L_\Theta) \approx L_a \otimes L_b \approx K \otimes j^{-1}$. ■

Lema 71 Consideremos a aplicação $\nu : J \times J^1 \rightarrow J \times J^1$ definida por $\nu(j, \xi) = (j^{-1}, \xi)$.

$\tau^* \nu^* L_T$ define uma família de fibrados linha sobre X parametrizada por J^1 , que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado linha isomorfo a ξ^2 .

Demonstração:

Seja $i_\xi : X \rightarrow X \times J^1$ a inclusão $x \mapsto (x, \xi)$. O resultado que se pretende demonstrar é o do isomorfismo $i_\xi^* \tau^* \nu^* L_T \simeq \xi^2$ entre fibrados linha sobre X . Observemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{i_\xi} & X \times J^1 & \xrightarrow{\tau} & J \times J^1 & \xrightarrow{\nu} & J \times J^1 \\ & & p_X \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ & & X & \xrightarrow{t} & J^1 & \longrightarrow & J^1 \end{array} \quad (2.2)$$

Tem-se $\mu(\nu(\tau(i_\xi(x)))) = \mu(\nu(\tau(x, \xi))) = \mu(\nu(L_x \otimes \xi^{-1}, \xi)) = \mu(\xi \otimes L_x^{-1}, \xi) = \xi^2 \otimes L_x^{-1}$.

Portanto só temos que mostrar que a imagem recíproca de L_Θ pela aplicação $x \mapsto \xi^2 \otimes L_x^{-1}$ é um fibrado linha isomorfo a ξ^2 . Mas pelo lema 69(i) é suficiente provar que a imagem recíproca de L_Θ pela aplicação $x \mapsto K \otimes \xi^{-2} \otimes L_x$ é um fibrado linha isomorfo a ξ^2 . Ora isto é uma consequência do lema 70 fazendo $j = K \otimes \xi^{-2}$. ■

Definição 72 [4](p.463) Sejam M e N espaços topológicos e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua.

Se \mathcal{F} for um feixe sobre M chama-se i -ésima imagem directa ao feixe $f_*^i(\mathcal{F})$ sobre N associado ao pré-feixe

$$U \longrightarrow H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$$

No caso em que f é própria e $h^i(f^{-1}(q), \mathcal{F}|_{f^{-1}(q)})$ é constante, o feixe $f_*^i(\mathcal{F})$ é localmente livre com fibra no ponto $q \in N$ dada por $H^i(f^{-1}(q), \mathcal{F}|_{f^{-1}(q)})$.

Assim, dado um fibrado W sobre M tem-se que $f_*^i(W)$ é o fibrado i -ésima imagem directa sobre N cuja fibra em cada ponto é dada por $H^i(f^{-1}(q), W|_{f^{-1}(q)})$. Tem-se ainda o seguinte resultado [6](p.253) para W fibrado sobre M e V fibrado sobre N

$$f_*^i(W \otimes f^*(V)) \simeq f_*^i(W) \otimes V$$

Na demonstração do lema que se segue precisamos de usar um resultado chamado "Seesaw Theorem", enunciado e demonstrado por Lange em [7]. Assim tem-se:

Teorema 73 "Seesaw"

Sejam M uma variedade complexa compacta e conexa, N um espaço analítico reduzido e \mathcal{L} um fibrado linha sobre $M \times N$.

(i) O conjunto $N_0 = \{q \in N : \mathcal{L}|_{M \times q} \text{ é trivial}\}$ é fechado para a topologia de Zariski;

(ii) Se $p_0 : M \times N_0 \rightarrow N_0$ for a aplicação projecção, então existe um fibrado linha L sobre N_0 tal que

$$\mathcal{L}|_{M \times N_0} \simeq p_0^*(L)$$

Lema 74 Existe um fibrado linha sobre J que vamos denotar por $L_{2\Theta_0}$ tal que

$$p_J^*(L_{2\Theta_0}) \approx L_T \otimes \nu^*L_T \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2})$$

e para $\eta \in J^1$, $L_{2\Theta_0}$ é isomorfo ao fibrado linha $L_{\eta^*\Theta} \otimes L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}$.

Demonstração:

Consideremos o divisor em J^1 definido pelos elementos $j^{-1} \otimes L_x$ com $x \in X$, $j \in J$, que denotaremos por $j^*\Theta$. Os divisores $j^*\Theta + (j^{-1})^*\Theta$ e 2Θ são linearmente equivalentes, já que, pelo Teorema do quadrado [7](p.33), para a translacção $t_j : J^1 \xrightarrow{\otimes j} J^1$ se tem

$$t_{jj^{-1}}^*L_\Theta \approx t_j^*(L_\Theta) \otimes t_{j^{-1}}^*(L_\Theta) \otimes L_\Theta^{-1}$$

o que é equivalente a $L_\Theta^2 \approx t_j^*(L_\Theta) \otimes t_{j^{-1}}^*(L_\Theta) = L_{j^*\Theta} \otimes L_{(j^{-1})^*\Theta}$.

Novamente com a ajuda do diagrama 2.2 podemos verificar que $\mu[\nu(j, \xi)] = j^{-1} \otimes \xi$ e portanto os fibrados $L_T|_{j \times J^1}$ e $\nu^*L_T|_{j \times J^1}$ são respectivamente os fibrados associados aos divisores $j^*\Theta$ e $(j^{-1})^*\Theta$. Assim $L_T \otimes \nu^*L_T|_{j \times J^1}$ é o fibrado linha sobre J^1 associado ao divisor $j^*\Theta + (j^{-1})^*\Theta$ e portanto isomorfo a L_Θ^2 .

Consideremos agora as projecções p_J e p_{J^1} . Tem-se que $L_T \otimes \nu^*L_T \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2})$ é um fibrado linha sobre $J \times J^1$ e a sua restrição a $j \times J^1$ é trivial. Então, pelo teorema 73 vai existir um fibrado linha $L_{2\Theta_0}$ sobre J tal que

$$p_J^*(L_{2\Theta_0}) \approx L_T \otimes \nu^*L_T \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2})$$

Por outro lado, para $\eta \in J^1$ consideremos o divisor $\eta^*\Theta$ em J definido como imagem recíproca de Θ pela aplicação $j \mapsto j \otimes \eta$. Tem-se $L_T|_{J \times \{\eta\}} \approx L_{\eta^*\Theta}$ e usando o lema 69(i) vem $\nu^*L_T|_{J \times \{\eta\}} \approx L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}$. Conclusão $L_{2\Theta_0}$ vai ser isomorfo ao fibrado linha $L_{\eta^*\Theta} \otimes L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}$ sobre J . ■

Chegamos então finalmente à construção do fibrado F que referimos na introdução.

Consideramos para isso um fibrado \mathcal{F} sobre $X \times J^1$, ou equivalentemente uma família de fibrados sobre X parametrizada por J^1 , que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado linha isomorfo a ξ^{-2} , e usamos a sua 1ª imagem directa pela projecção p_{J^1} para definir F . Trata-se de facto de um fibrado já que p_{J^1} é própria e $h^1(p_{J^1}^{-1}(\xi), \mathcal{F}|_{X \times \xi}) = h^1(X, \xi^{-2}) = -(1 - g - 2) = 3$ (ver definição 72). Assim,

Proposição 75 *Existe uma sequência exacta de fibrados sobre J^1 :*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow J^1 \times H^0(J^1, L_\Theta^2) \longrightarrow L_\Theta^2 \longrightarrow 0$$

onde a sobrejecção é a aplicação avaliação e F pode ser identificado com a primeira imagem directa em J^1 de uma família de fibrados linha sobre X parametrizada por J^1 , que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado linha isomorfo a ξ^{-2} .

Demonstração:

Consideremos a sequência exacta de feixes sobre $J \times J^1$:

$$0 \longrightarrow L_T^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{J \times J^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{J \times J^1|T} \longrightarrow 0$$

e vamos tensorizá-la com o fibrado $p_J^*(L_{2\Theta_0})$. Obtem-se, de acordo com o lema 74

$$0 \longrightarrow \nu^*(L_T) \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2}) \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0}) \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0})|_T \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

Queremos então saber qual a sequência exacta obtida ao aplicar a imagem directa de ordem zero $(p_{J^1})_*$.

$\nu^*(L_T)$ é a imagem recíproca pela aplicação $j \mapsto j^{-1} \otimes \xi$ de J em J^1 do fibrado L_Θ , logo é amplo e portanto $H^1(J \times \{\xi\}, \nu^*(L_T)) = 0$ para qualquer $\xi \in J^1$. Ou seja a primeira imagem directa $(p_{J^1})_*^1$ de $\nu^*(L_T) \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2})$ é nula, fazendo da sequência de cohomologia de 2.3 uma sequência exacta curta. Precisamente a sequência de fibrados vectoriais sobre J^1 obtida por aplicação de $(p_{J^1})_*$ às componentes de 2.3:

$$0 \longrightarrow (p_{J^1})_*[\nu^*(L_T)] \otimes L_\Theta^{-2} \longrightarrow J^1 \times H^0(J, L_{2\Theta_0}) \longrightarrow (p_{J^1})_* \tau_* \tau^* p_J^*(L_{2\Theta_0}) \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

Mas $h^0(J \times \{\eta\}, \nu^*L_T) = h^0(J^1, L_\Theta) = 1$ pelo lema 69(ii). Logo $(p_{J^1})_*(\nu^*L_T)$ é um fibrado linha com uma secção cuja restrição a cada fibra é não nula. Isto significa que $(p_{J^1})_*(\nu^*L_T)$ admite uma secção que nunca se anula e portanto é o fibrado linha trivial.

Vamos então dualizar a sequência, denotando por F o fibrado dual de $(p_{J^1})_* \tau_* \tau^* p_J^*(L_{2\Theta_0})$ e obter:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow J^1 \times (H^0(J, L_{2\Theta_0}))^* \longrightarrow L_\Theta^2 \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

Para interpretar do fibrado F como primeira imagem directa em J^1 de uma família de fibrados linha sobre X , parametrizada por J^1 , que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado isomorfo a ξ^{-2} , observemos que, pelos lemas 74 e 68

$$\begin{aligned} \tau^* p_J^*(L_{2\Theta_0}) &= \tau^*(L_T \otimes \nu^*L_T \otimes p_{J^1}^*(L_\Theta^{-2})) \\ \tau^*L_T &= \tau^* \mu^*(L_\Theta) = (\mu \circ \tau)^* L_\Theta = (t \circ p_X)^* L_\Theta = p_X^* \circ t^* L_\Theta \simeq p_X^* K \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo lema 71 $\tau^* \nu^* L_T$ pode ser interpretado como uma família de fibrados linha sobre X que faz corresponder a cada $\xi \in J^1$ um fibrado isomorfo a ξ^2 .

Conclusão, podemos interpretar $\tau^* p_J^*(L_{2\Theta_0})$ como uma família de fibrados linha sobre X que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado isomorfo a $K \otimes \xi^2$, e ter como consequência que

$(p_{J^1})_* \tau_* \tau^* p_J^* (L_{2\Theta_0})$ é a imagem directa de ordem zero dessa família pela aplicação $p_{J^1} \circ \tau$. Como $F = [(p_{J^1})_* \tau_* \tau^* p_J^* (L_{2\Theta_0})]^*$, a interpretação pretendida vem pela dualidade de Serre.

Resta então mostrar que a aplicação natural $(H^0(J, L_{2\Theta_0}))^* \longrightarrow H^0(J^1, L_\Theta^2)$ dada pela sequência de cohomologia associada a 2.5

$$0 \longrightarrow H^0(J^1, F) \longrightarrow (H^0(J, L_{2\Theta_0}))^* \longrightarrow H^0(J^1, L_\Theta^2) \longrightarrow 0$$

é um isomorfismo.

Pelo Teorema de Riemann-Roch para fibrados linha sobre superfícies e porque K_J é trivial vem

$$\chi(L_{2\Theta_0}) = \chi(\mathcal{O}_J) + \frac{2\Theta_0 \cdot 2\Theta_0}{2}$$

o que por $L_{2\Theta_0}$ ser amplo significa

$$h^0(J, L_{2\Theta_0}) = 1 - h^1(J, \mathcal{O}_J) + h^2(J, \mathcal{O}_J) + 2(\Theta_0 \cdot \Theta_0)$$

Aplicando a fórmula de adjunção vem $\Theta_0 \cdot \Theta_0 = 2g_{\Theta_0} - 2 = 2$.

Por outro lado $h^1(J, \mathcal{O}_J) = h^0(J, \Omega^1) = 2$ e $h^2(J, \mathcal{O}_J) = h^0(J, \Omega^2) = 1$, portanto

$$h^0(J, L_{2\Theta_0}) = 4.$$

Mas pelo lema 69(ii) também temos $h^0(J^1, L_\Theta^2) = 4$, logo só temos que mostrar que $H^0(J^1, F) = 0$, ou equivalentemente, pela dualidade de Kodaira-Serre que $H^2(J^1, F^*) = 0$.

Da interpretação que fizemos de $M = \tau^* L_T \otimes \tau^* \nu^* L_T \otimes p_{J^1}^* (L_\Theta^{-2})$ vem $(p_{J^1})_*^1 M = 0$ e $(p_{J^1})_*^2 M = 0$. Vejamos porquê.

M é um fibrado sobre $X \times J^1$. Denotaremos na mesma por p_{J^1} a projecção de $X \times J^1$ em J^1 já que $p_{J^1} \circ \tau = p_{J^1}$. Então, da interpretação referida anteriormente vem

$$(p_{J^1})_*^i M = (p_{J^1})_*^i [p_X^* (K \otimes \xi^2) \otimes p_{J^1}^* (L_\Theta^{-2})] = (p_{J^1})_*^i [p_X^* (K \otimes \xi^2)] \otimes L_\Theta^{-2}$$

Ora, para $\eta \in J^1$ vem

$$(p_{J^1})_*^1 [p_X^* (K \otimes \xi^2)] (\eta) = H^1(X \times \{\eta\}, p_X^* (K \otimes \xi^2)) \simeq H^1(X, K \otimes \xi^2) \simeq H^0(X, \xi^{-2})^* = 0$$

e por outro lado

$$(p_{J^1})_*^2 [p_X^* (K \otimes \xi^2)] (\eta) = H^2(X \times \{\eta\}, p_X^* (K \otimes \xi^2)) \simeq H^2(X, K \otimes \xi^2) = 0$$

Tendo presente que $F^* = (p_{J^1})_* M$, podemos recorrer a um caso degenerado da sequência espectral de Leray ($E_2 \simeq E_\infty$) [6](p.252);[4](p.463) para concluir que

$$H^2(J^1, F^*) \simeq H^2(X \times J^1, M)$$

Podemos repetir o mesmo argumento considerando agora $M|_{x \times J^1}$. Ou seja, recordando novamente o diagrama 2.2, os dois primeiros factores de M surgem, quando restringidos a $x \times J^1$ como imagens recíprocas de L_Θ , respectivamente por uma aplicação constante e pela aplicação $\xi \longmapsto \xi^2 \otimes L_x^{-1}$ e portanto, para cada $x \in X$, vem que $M|_{x \times J^1}$ é isomorfo ao produto tensorial de L_Θ^{-2} pela imagem recíproca de L_Θ por esta aplicação. Tratando-se da aplicação Q_{L_x} definida no lema 69(iii), vem como consequência que $M|_{x \times J^1} \simeq Q_{L_x}^* (L_\Theta) \otimes L_\Theta^{-2}$

é algebricamente equivalente a L_Θ^2 e portanto é amplo:

$$(p_X)_*^i M(x) \simeq H^i(\{x\} \times J^1, M|_{x \times J^1}) \simeq H^i(J^1, L_\Theta^2) = 0 \text{ para } i \geq 1$$

Finalmente concluímos que

$$H^2(X \times J^1, M) \simeq H^2(X, (p_X)_* M) = 0$$

■

Chamamos a atenção nesta fase para o facto de, além de construído o fibrado F , ter ficado estabelecida a identificação

$$(H^0(J, L_{2\Theta_0}))^* \simeq H^0(J^1, L_\Theta^2)$$

sendo que, a partir dela, o morfismo associado ao sistema linear $|2\Theta|$:

$$\varphi_{|2\Theta|} : J^1 \longrightarrow \mathbb{P}H^0(J^1, L_\Theta^2)^*$$

fica compatível com o morfismo definido pela inclusão em 2.4:

$$\begin{array}{ccc} J^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}H^0(J, L_{2\Theta_0}) \\ \xi & \longmapsto & (L_\Theta^{-2})_\xi \end{array}$$

Vamos então tentar compreender exactamente como fica definido este último morfismo.

Lema 76 *Para $\eta \in J^1$ a imagem da aplicação*

$$H^0(J, L_{\eta^*\Theta}) \otimes H^0(J, L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}) \longrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$$

dada pelo isomorfismo $L_{\eta^*\Theta} \otimes L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta} \approx L_{2\Theta_0}$ define uma inclusão

$$(L_\Theta^{-2})_\eta \hookrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$$

Demonstração:

$$(L_\Theta^{-2})_\eta = [(p_{J^1})_* p_{J^1}^* (L_\Theta^{-2})]_\eta = [(p_{J^1})_* (L_T^{-1} \otimes (\nu^* L_T)^{-1} \otimes p_J^* (L_{2\Theta_0}))]_\eta.$$

Mas já tínhamos visto na demonstração da proposição 75 que $(p_{J^1})_* (\nu^* L_T)$ é o fibrado trivial.

$$\begin{aligned} \text{Portanto } & [(p_{J^1})_* (L_T^{-1} \otimes (\nu^* L_T)^{-1} \otimes p_J^* (L_{2\Theta_0}))]_\eta = [(p_{J^1})_* (L_T^{-1} \otimes p_J^* (L_{2\Theta_0}))]_\eta = \\ & = H^0(J \times \{\eta\}, (L_T^{-1} \otimes p_J^* (L_{2\Theta_0}))|_{J \times \{\eta\}}) = \\ & = H^0(J, L_{\eta^*\Theta}^{-1} \otimes L_{2\Theta_0}) = \\ & = H^0(J, L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}) \text{ pelo lema 74.} \end{aligned}$$

Ou seja, a aplicação $(L_\Theta^{-2})_\eta \longrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$ é induzida por uma secção não nula de $H^0(J, L_{\eta^*\Theta})$. ■

Proposição 77 Para $\xi \in J^1$ tal que $\xi \neq \eta$ e $\xi \neq K \otimes \eta^{-1}$ o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} (L_{\Theta}^2)_{\eta} & \longleftarrow & H^1(X, \xi^{-1} \otimes \eta) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(J^1, L_{\Theta}^2) & \longleftarrow & H^1(X, \xi^{-2}) \end{array}$$

e descreve-se do seguinte modo:

- $H^0(J^1, L_{2\Theta}) \longrightarrow (L_{\Theta}^2)_{\eta}$ é a aplicação avaliação em η ;
- $H^1(X, \xi^{-2}) \longrightarrow H^1(X, \xi^{-1} \otimes \eta)$ é induzida por uma secção não nula de $\xi \otimes \eta$;
- $H^1(X, \xi^{-2}) \longrightarrow H^0(J^1, L_{\Theta}^2)$ é a inclusão da fibra F_{ξ} ;
- $H^1(X, \xi^{-1} \otimes \eta) \longrightarrow (L_{\Theta}^2)_{\eta}$ é um isomorfismo.

Demonstração:

Consideremos novamente a sequência exacta 2.3 mas desta vez na forma

$$0 \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0}) \otimes L_T^{-1} \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0}) \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0})|_T \longrightarrow 0$$

Usando o isomorfismo $L_{\eta^*\Theta} \otimes L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta} \approx L_{2\Theta_0}$ e observando que $h^0(J, L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta}) = h^0(J^1, L_{\Theta}) = 1$, podemos definir um homomorfismo não nulo $L_{\eta^*\Theta} \longrightarrow L_{2\Theta_0}$ que induz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & p_J^*(L_{\eta^*\Theta}) \otimes L_T^{-1} & \longrightarrow & p_J^*(L_{\eta^*\Theta}) & \longrightarrow & p_J^*(L_{\eta^*\Theta})|_T & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & p_J^*(L_{2\Theta_0}) \otimes L_T^{-1} & \longrightarrow & p_J^*(L_{2\Theta_0}) & \longrightarrow & p_J^*(L_{2\Theta_0})|_T & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ora $p_J^*(L_{\eta^*\Theta})|_T$ é interpretado como $\tau_*\tau^*(p_J^*(L_{\eta^*\Theta}))$ e $\tau^*(p_J^*(L_{\eta^*\Theta}))|_{X \times \{\xi\}}$ é o fibrado imagem recíproca de L_{Θ} pela aplicação de X em J^1 definida por $x \longmapsto \eta \otimes \xi^{-1} \otimes L_x$, logo, usando o lema 70 com $\eta \otimes \xi^{-1}$ no papel de $j \in J$, vem que $\tau^*(p_J^*(L_{\eta^*\Theta}))$ define uma família de fibrados linha sobre X parametrizada por J^1 que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado isomorfo a $K \otimes \xi \otimes \eta^{-1}$.

Então temos que a aplicação $p_J^*(L_{\eta^*\Theta})|_T \longrightarrow p_J^*(L_{2\Theta_0})|_T$ do diagrama é induzida por uma secção não nula de $p_J^*(L_{(K \otimes \eta^{-1})^*\Theta})|_T$. Portanto a aplicação induzida

$$(p_{J^1})_* \left(p_J^*(L_{\eta^*\Theta})|_T \right) \longrightarrow (p_{J^1})_* \left(p_J^*(L_{2\Theta_0})|_T \right)$$

pode ser interpretada para cada $\xi \in J^1$ tal que $\xi \neq \eta$ e $\xi \neq K \otimes \eta^{-1}$ como a aplicação induzida por uma secção não nula de $\xi \otimes \eta$:

$$H^0(X, K \otimes \xi \otimes \eta^{-1}) \longrightarrow H^0(X, K \otimes \xi^2)$$

isto porque, para $\xi \neq \eta$ e $\xi \neq K \otimes \eta^{-1}$ as dimensões $h^0(X, K \otimes \xi \otimes \eta^{-1})$ e $h^0(X, \xi \otimes \eta)$ mantêm-se constantes e iguais a 1.

Por outro lado a aplicação $p_J^*(L_{\eta^*\Theta}) \longrightarrow p_J^*(L_{\eta^*\Theta})|_T$ do diagrama induz a aplicação

$$H^0(J, L_{\eta^*\Theta}) \longrightarrow H^0(X, K \otimes \xi \otimes \eta^{-1})$$

que fica definida tomando as imagens recíprocas das secções de $L_{\eta^*\Theta}$ pela aplicação $x \longmapsto L_x \otimes \xi^{-1}$. Como $\xi \neq \eta$ e $\xi \neq K \otimes \eta$ esta aplicação é um isomorfismo.

Podemos então deduzir do diagrama anterior um outro diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^0(J, L_{\eta^*\Theta}) & \longrightarrow & H^0(X, K \otimes \xi \otimes \eta^{-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(J, L_{2\Theta_0}) & \longrightarrow & H^0(X, K \otimes \xi^2) \end{array}$$

Mas pelo lema 76 podemos substituir $H^0(J, L_{\eta^*\Theta})$ por $(L_{\Theta}^{-2})_{\eta}$ e a aplicação $H^0(J, L_{\eta^*\Theta}) \longrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$ pela inclusão $(L_{\Theta}^{-2})_{\eta} \hookrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$. Resta então considerar o diagrama dual par obter o resultado. ■

Proposição 78 *O morfismo de J^1/ι em $\mathbb{P}H^0(J^1, L_{\Theta}^2)^*$ induzido pelo fibrado L_{Θ}^2 é injectivo.*

Demonstração:

Já vimos que a sobrejecção na sequência exacta da proposição 75 permite identificar $H^0(J^1, L_{\Theta}^2)^*$ com $H^0(J, L_{2\Theta_0})$ e, como consequência tornar compatíveis os morfismos $\varphi|_{2\Theta_1}$ e o que é induzido pela aplicação $J^1 \longrightarrow H^0(J, L_{2\Theta_0})$ que faz corresponder a cada $\xi \in J^1$ o subespaço $(L_{\Theta}^{-2})_{\xi}$ de $H^0(J, L_{2\Theta_0})$. Mas vimos depois no lema 76 que este subespaço corresponde à imagem de $H^0(J, L_{\xi^*\Theta}) \otimes H^0(J, L_{(K \otimes \xi^{-1})^*\Theta})$ em $H^0(J, L_{2\Theta_0})$. Isto significa que o morfismo é induzido pela aplicação que associa a cada $\xi \in J^1$ o divisor $\xi^*\Theta + (K \otimes \xi^{-1})^*\Theta$ em J . Então ao quocientar J^1 pela involução ι obtém-se a injectividade. ■

N&R mostram em [10] que este morfismo é mesmo um mergulho.

Proposição 79 *Se s_{Θ} for uma secção de L_{Θ}^2 , denotaremos por $D_{s_{\Theta}}$ o conjunto*

$$\{\eta \in J^1 \mid s_{\Theta}(\eta) = 0\}$$

Então $D_{s_{\Theta_1}} = D_{s_{\Theta_2}}$ se e só se $s_{\Theta_1} = \lambda s_{\Theta_2}$ para um escalar $\lambda \neq 0$.

Isto significa que qualquer divisor linearmente equivalente a 2Θ fica univocamente determinado pelo seu suporte.

Demonstração:

Consideremos $D = D_{s_1} = D_{s_2}$. Recordando que $h^0(J^1, L_{\Theta}^2) = 4$ pelo lema 69(ii), se $\dim \{s \in H^0(J^1, L_{\Theta}^2) : s(D) = 0\} \geq 2$, então o morfismo $\varphi|_{2\Theta_1} : J^1 \longrightarrow \mathbb{P}H^0(J^1, L_{\Theta}^2)^*$ dado por $\eta \longmapsto [s_1(\eta) : s_2(\eta) : s_3(\eta) : s_4(\eta)]$, em que $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ é base de $H^0(J^1, L_{\Theta}^2)$, aplica D em \mathbb{P}^1 , já que se anulam em D duas das coordenadas homogéneas. Mas, pela proposição 78 este morfismo induz um morfismo injectivo de J^1/ι em $\mathbb{P}H^0(J^1, L_{\Theta}^2)^*$. Isto significa que D é invariante para a involução ι , e portanto que D/ι é racional, tendo por isso no máximo duas componentes racionais obtidas uma a partir da outra por aplicação de ι . Ora isto não pode acontecer por não haver morfismos não constantes de \mathbb{P}^1 para J^1 . ■

2.4 A subvariedade S de $U(2, 0)$

Seja X uma curva algébrica completa irredutível e não singular de género 2.

Seja S o espaço das classes de S-equivalência de fibrados semi-estáveis de dimensão 2 e determinante trivial sobre X .

Seja J^1 o espaço das classes de equivalência de fibrados linha de grau 1 sobre X .

Seja Θ o divisor em J^1 definido pelo mergulho natural de X em J^1 e L_Θ o seu fibrado linha associado.

Teorema 80 *Para um fibrado semi-estável E de dimensão 2 e determinante trivial sobre X , o conjunto*

$$C_E = \{L \in J^1 \mid H^0(X, L \otimes E) \neq 0\}$$

é o suporte de um divisor positivo D_E unívocamente determinado e linearmente equivalente ao divisor 2Θ . Além disso D_E depende apenas da classe de S-equivalência de E , e a aplicação induzida

$$D : S \longrightarrow \mathbb{P}H^0(J^1, L_\Theta^2)$$

é um isomorfismo. Ou seja, S é isomorfo a um espaço projectivo de dimensão 3.

A demonstração deste Teorema vai ser feita com base no seguinte lema:

Lema 81 *Seja $0 \longrightarrow \xi^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow \xi \longrightarrow 0$ extensão não trivial de $\xi \in J^1$ e $\sigma(E)$ o correspondente elemento em $H^1(X, \xi^{-2})$ (Teorema 27). Seja $F_\xi = H^1(X, \xi^{-2})$ a fibra em ξ do fibrado F definido na proposição 75. Se a imagem de $\sigma(E)$ em $J^1 \times H^0(J^1, L_\Theta^2)$ for dada por (ξ, s_Θ) com s_Θ secção de L_Θ^2 , então*

$$C_E = \{L \in J^1 \mid s_\Theta(L) = 0\}$$

Demonstração:

Por hipótese $\xi \in C_E$. De acordo com a observação 59 vem também $K \otimes \xi^{-1} \in C_E$. Por outro lado, pela proposição 75, vem $s_\Theta(\xi) = 0$ e pela proposição 78 $s_\Theta(K \otimes \xi^{-1}) = 0$. Podemos então assumir que $L \neq \xi$ e $L \neq K \otimes \xi^{-1}$ e provar que $L \in C_E \Leftrightarrow s_\Theta(L) = 0$. Pelo teorema 61 vem $L \in C_E \Leftrightarrow \sigma(E) \in \text{Ker}[H^1(X, \xi^{-2}) \longrightarrow H^1(X, \xi^{-1}L)]$ em que esta aplicação é induzida por uma secção não nula $\lambda_{\xi \otimes L}$ de $\xi \otimes L$. Usando agora o diagrama comutativo da proposição 77

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \xi^{-2}) & \longrightarrow & H^1(X, \xi^{-1} \otimes \eta) \\ \sigma(E) & \longmapsto & \sigma(E) \otimes \lambda_{\xi \otimes \eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ s_\Theta & \longmapsto & s_\Theta(\eta) \\ H^0(J^1, L_\Theta^2) & \longrightarrow & (L_\Theta^2)_\eta \end{array}$$

vem que $L \in C_E$ sse $s_\Theta(L) = 0$. ■

Demonstremos então o teorema:

Demonstração:

Pelo teorema 52 e pelo lema 60 vem para cada $\tilde{E} \in S$ a existência de um representante $E \in \tilde{E}$ tal que $\sigma(E) \in H^1(X, \xi^{-2})$ para algum $\xi \in J^1$, ou seja, tem-se $0 \rightarrow \xi^{-1} \rightarrow E \rightarrow \xi \rightarrow 0$ para algum $\xi \in J^1$. Por outro lado, pelo lema 81 acima demonstrado, o conjunto C_E é o conjunto dos zeros de uma secção s_Θ de L_Θ^2 , logo é suporte de um divisor em J^1 , linearmente equivalente a 2Θ , que denotámos por D_E . Agora, pela proposição 79 D_E fica univocamente determinado por C_E , e pelo teorema 58 $C_E = C_{\tilde{E}}$ depende apenas de $\tilde{E} \in S$.

Consideremos então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(F) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}H^0(J^1, L_\Theta^2) \\ s \searrow & & \uparrow D \\ & & S \end{array}$$

em que que a aplicação f é induzida pela aplicação injectiva de 2.5, e s é a aplicação que a um elemento $\sigma(E) \in \mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$ que classifique E como extensão de ξ por ξ^{-1} faz corresponder a classe de S-equivalência $\tilde{E} \in S$ de E .

Feita a identificação entre o divisor D_E eo seu suporte $C_E = C_{\tilde{E}}$ vem $D[\tilde{E}] = D_E$ e pelo lema 81 este diagrama comuta. Por um lado $f[\sigma(E)] = s_\Theta$, e por outro $D_E = (s_\Theta)$.

Observemos agora que f é uma aplicação sobrejectiva.

Dada uma secção não trivial s de L_Θ^2 :

$s \in \mathbb{P}H^0(J^1, L_\Theta^2)$, s não trivial $\implies C_s = \{L \in J^1 \mid s(L) = 0\}$ é suporte de um divisor positivo em J^1 .

Mas pela sequência exacta 2.5, como $av(\xi, s) = 0$ para $\xi \in C_s$ vem que existe $\sigma(E) \in F_\xi$ que tem (ξ, s) como imagem. Agora, pelo lema 81 $C_s = C_E$ e pelo lema 60 vem que E é S -equivalente a uma extensão não trivial de ξ por ξ^{-1} , ou seja existe $\sigma(E) \in \mathbb{P}(F_\xi)$ que tem (ξ, s) como imagem. Então tem-se $s = f[\sigma(E)]$ e portanto f é sobrejectiva.

Daqui concluímos que também D é sobrejectiva.

Mostraremos agora que D é injectiva.

Consideremos $w_1, w_2 \in S$ tais que $D(w_1) = D(w_2)$. Seja $\xi \in \text{supp}D(w_1) = \text{supp}D(w_2)$. Novamente pelo lema 60 vão existir $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{P}(F)_\xi$ tais que $s(\sigma_1) = w_1$ e $s(\sigma_2) = w_2$. Pela comutatividade do diagrama tem-se $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$. Mas a restrição de f a cada fibra coincide com a inclusão da fibra F_ξ em $\mathbb{P}H^0(J^1, L_\Theta^2)$ dada por 2.5 e portanto é injectiva. Assim vem $\sigma_1 = \sigma_2$ e portanto $w_1 = w_2$. Temos portanto que D é uma aplicação bijectiva.

O facto de ser D um morfismo vem de s ser um morfismo. Por um lado $\mathbb{P}(F)$ é uma família de fibrados de dimensão 2 e determinante trivial indexada em J^1 . Por outro a imagem de $\sigma(E)$ pela aplicação natural $\mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2}) \rightarrow H^1(X, E \otimes \xi^{-1})$ ser nula faz com que exista o levantamento para $\mathbb{P}(F)$ do morfismo de J^1 em S [10](lema 3.1) dado pela propriedade universal [14](teo.8.1), que a cada ξ faz corresponder a classe de S -equivalência de $\sigma(E) \in \mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$. ■

Observemos novamente o diagrama que permitiu provar este resultado:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(F) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}H^0(J^1, L_{\Theta}^2) \\ s \searrow & & \uparrow D \\ & & S \end{array}$$

Pelo teorema de Riemann-Roch, para $\xi \in J^{g-1}$ vem $h^1(X, \xi^{-2}) = -(1 - g - 2(g - 1)) = 3g - 3 = 3$. Assim o nosso objecto de estudo $\mathbb{P}(F)$, como espaço total de um fibrado sobre J^1 com fibra $\mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$, tem neste caso ($g = 2$) dimensão projectiva igual a $4 = 2 + 2$, sendo estas parcelas as dimensões respectivas da base J^1 e da fibra $\simeq \mathbb{P}^2$. Por outro lado, pelo lema 69(ii), $\dim H^0(J^1, L_{\Theta}^2) = 4$ e portanto, de acordo com o resultado provado (*Teorema 80*), $\dim S = 3$. Ou seja, no caso dos fibrados semi-estáveis não temos um isomorfismo entre $\mathbb{P}(F)$ e $J^1 \times \mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$ como no caso dos instáveis (*Teorema 35*), mas apenas a sobrejecção garantida pelo *Teorema 52*. Além disso, de acordo com as dimensões observadas, a imagem inversa de uma classe de equivalência $\tilde{E} \in S$ pela aplicação s será uma variedade projectiva de dimensão 1, isto é, uma curva algébrica que seria interessante determinar.

Comentário final

Atiyah enunciava em [2](teorema 4) que “ $\mathcal{U}(n, d)$ está em correspondência biunívoca com um subconjunto de \mathcal{F}/Q em que \mathcal{F} é um fibrado vectorial sobre a variedade de Picard de X , e Q uma relação de equivalência em \mathcal{F} preservada pelas fibras”. Aqui $\mathcal{U}(n, d)$ representa o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados de dimensão n e grau d . Este fibrado \mathcal{F} surge do resultado imediatamente anterior (teorema 3) e teria como fibra sobre um fibrado linha $L \in \text{Pic}(X)$ o espaço vectorial em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de extensões de L .

No 1º capítulo ficou estabelecida com o Teorema 35 a existência, no caso dos fibrados instáveis, de uma fibração sobre cada componente $J^{\text{div}E}$ da jacobiana com $\text{div}E \geq 0$, de fibra $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$ com $L \in J^{\text{div}E}$. Mas, porque a dimensão das fibras varia com L , não se trata de um fibrado vectorial como sugeria o Teorema acima citado.

O 2º capítulo é dedicado ao tratamento do caso dos fibrados semi-estáveis para superfícies de Riemann de género 2 ($\text{div}E \leq 0$) e limitámo-nos a tentar perceber qual seria o fibrado que poderia corresponder a $\mathcal{U}^{\text{ss}}(2, \mathcal{O})$ de acordo com esta motivação. Ou seja, a base em causa foi a componente da variedade de Picard de X dos fibrados linha de grau 1, e estudámos apenas os fibrados de dimensão 2 semi-estáveis com determinante trivial. Neste caso fica de facto estabelecida a existência do fibrado F sobre J^1 a que Atiyah se referia. Vai ter como fibra o espaço das extensões de ξ por ξ^{-1} , $H^1(X, \xi^{-2})$. De salientar que a notação usada neste capítulo atribui ao fibrado linha que denotámos por ξ^{-1} o papel que tinha o fibrado linha L no 1º capítulo, e é o fibrado trivial \mathcal{O} que ocupa a posição de fibrado determinante para o qual usámos a notação ξ no 1º capítulo. Por isso o espaço projectivo $\mathbb{P}H^1(X, L^2\xi^{-1})$ do teorema 35 tem o mesmo papel que a fibra $\mathbb{P}H^1(X, \xi^{-2})$ de $\mathbb{P}(F)$.

Depois de vários resultados preliminares construímos na proposição 75 o fibrado F sobre J^1 que é identificado com a primeira imagem directa em J^1 de uma família de fibrados linha sobre X parametrizada por J^1 , que a cada $\xi \in J^1$ faz corresponder um fibrado linha isomorfo a ξ^{-2} . Analisando com detalhe esta construção assinalamos os seguintes como passos fundamentais:

- A existência de um mergulho canónico $t : X \longrightarrow J^1$, $t(x) = L_x$, que permitiu definir o divisor $\Theta = \{L \in J^1 \mid h^0(L) \geq 1\}$ em J^1 ;
- A possibilidade de definir através de imagens recíprocas de L_Θ um fibrado $L_T \otimes \nu^* L_T$ sobre $J \times J^1$ que é um fibrado de Poincaré [4][11] para os fibrados linha $L_{2\Theta_0}$ sobre J (lema 74);
- O estabelecimento de uma dualidade canónica $(H^0(J, L_{2\Theta_0}))^* \simeq H^0(J^1, L_\Theta^2)$.

Considerando então a projecção $p_{J^1} : X \times J^1 \longrightarrow J^1$, podemos resumir a construção do fibrado F do seguinte modo:

$$F = (p_{J^1})_*^1(\mathcal{E})$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \text{em que} & \downarrow & \text{é um fibrado sobre } X \times J^1 \text{ tal que } \mathcal{E}|_{X \times \xi} \simeq \xi^{-2} \\ & X \times J^1 & \end{array}$$

sendo portanto a fibra de F em $\xi \in J^1$ dada pelo espaço das extensões de ξ por ξ^{-1} .

O caso $g = 3$, estudado por Narasimhan e Ramanan em [11], não serve os nossos propósitos, no sentido em que, a construção feita em analogia com a do fibrado $\mathbb{P}(F)$, desta vez para demonstrar a existência de um mergulho de S em $\mathbb{P}H^0(J^2, \mathcal{O}(2\theta))$, é um fibrado sobre J^1 e não sobre J^2 . No entanto esta seria a componente da Jacobiana que nos garantiria pelo menos a sobrejectividade da correspondência $F \longrightarrow S$ de acordo com o teorema 52. No entanto esta construção é precedida por resultados válidos para qualquer género $g \geq 2$:

- Definição de um divisor θ em J^{g-1} ;
- A possibilidade de usar imagens recíprocas de L_θ , em analogia com o lema 74, para garantir a existência de um fibrado linha L_Φ sobre J , e de definir a partir delas um fibrado sobre $J \times J^{g-1}$ que é um fibrado de Poincaré [4],[11] para os fibrados L_Φ ;
- O estabelecimento de uma dualidade canónica $H^0(J, \mathcal{O}(\Phi))^* \simeq H^0(J^{g-1}, \mathcal{O}(2\theta))$.

O passo seguinte em [11] no entanto usa o facto de, para cada $\xi \in J^1$, existir um mergulho de X em J dado por $x \longmapsto \xi^{-1}L_x$, argumento já utilizado em [10] no caso $g = 2$. A nós interessar-nos-ia definir um mergulho de X em J a partir de um elemento de J^{g-1} , o que possivelmente não poderá ser feito de forma canónica.

Ainda assim, o facto de para cada $\xi \in J^{g-1}$, a dimensão de $H^1(X, \xi^{-2})$ ser constante ($= 3g - 3$ pelo Teorema de Riemann-Roch) e do teorema 52 garantir a sobrejectividade de $F \longrightarrow S$, permite a partir da projecção $p_{J^{g-1}} : X \times J^{g-1} \longrightarrow J^{g-1}$, estabelecer a existência do fibrado sobre J^{g-1} :

$$F = (p_{J^{g-1}})_*^1(\mathcal{E})$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \text{em que} & \downarrow & \text{é um fibrado sobre } X \times J^{g-1} \text{ tal que } \mathcal{E}|_{X \times \xi} = \xi^{-2} \\ & X \times J^{g-1} & \end{array}$$

sendo portanto a fibra de F em $\xi \in J^{g-1}$ dada pelo espaço das extensões de ξ por ξ^{-1} .

Bibliografia

- [1] Atiyah, Michael F. “Complex fibre bundles and ruled surfaces”, Proceedings of The London Mathematical Society (3) 5 (1955) 407-34.
- [2] Atiyah, Michael F. “Vector Bundles over an elliptic curve”, Proc. London Math.Soc.7 (1957), 414-452.
- [3] Beauville, A. “Vector Bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems” Alg-geom/9404001.
- [4] Griffiths, P. and Harris, J. ”Principles of Algebraic Geometry” , John Wiley & Sons, New York (1978).
- [5] Gunning, Robert C. “Lectures on Vector bundles over Riemann Surfaces”, Princeton University Press, 1967.
- [6] Hartshorne, R. “Algebraic Geometry”, Grad.texts math 52, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).
- [7] Lange, H. and Birkenhake, C. “Complex Abelian Varieties”, Series of comp. stud. in math.302, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [8] Miranda, R. “Algebraic Curves and Riemann Surfaces”, Grad.Stud. in Math. vol.5, American Mathematical Society (1995).
- [9] Narasimhan,M.S. “Compact Riemann Surfaces”, Birkhäuser (1992).
- [10] Narasimhan,M.S. and Ramanan, S. “Moduli of vector bundles on a compact Riemann Surface”. Ann. of Math. 89 (1969) 19-51.
- [11] Narasimhan,M.S. and Ramanan, S. “ 2θ –linear systems on abelian varieties”, Vector bundles on algebraic varieties, 415-427; Oxford University Press (1987).
- [12] Narasimhan,M.S. and Seshadri C. S. “Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann Surface”, Ann. of Math. 85 (1965), 540-567.
- [13] Newstead, P.E. “Introduction to moduli problems and orbit spaces”, Tata Institute of Fundamental research, Bombay(1978).
- [14] Seshadri C. S. “Space of unitary vector bundles on a compact Riemann Surface”, Ann. of Math. 85 (1967),303-336.
- [15] Tu, Loring “Semistable Bundles over an Elliptic Curve”, Advances in Mathematics 98, 1-26 (1993).