Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

Exame
24 de Junho de 2008

1. Seja $X = \mathbb{C}/\Lambda$ um torus complexo, onde Λ é o recticulado $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, com $Im(\tau) > 0$.
   (a) Prove que qualquer aplicação holomorfa $F : X \to X$ é não ramificada.
   (b) Mostre que o grau d de qualquer aplicação holomorfa $F : X \to X$ é um quadrado, isto é $d = n^2$, para certo $n \in \mathbb{N}$, e construa explicitamente aplicações holomorfas para todos os graus possíveis.

2. Sejam f e g duas funções meromorfas na esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ cujos divisores não se intersectam (i.e, o conjunto $\{p \in \mathbb{C}_\infty : ord_p(f) \neq 0\} \cap \{p \in \mathbb{C}_\infty : ord_p(g) \neq 0\}$ é vazio). Prove a seguinte igualdade:
$$\prod_{p \in \mathbb{C}_\infty} f(p)^{ord_p(g)} = \pm \prod_{p \in \mathbb{C}_\infty} g(p)^{ord_p(f)}.$$

3. Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ um polinómio de grau $2n$, e $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = p(x)\}$ uma curva plana afim.
   (a) Mostre que X é não singular se e só se todas as raizes de p são distintas.
   (b) Sendo Y a superfície hiperelíptica associada a X, mostre que as 1-formas dadas por $\omega = \frac{x^k dx}{y}$ (nas cartas em que $y \neq 0$), **não** são holomorfas em Y, se $k \geq n - 1$.

4. Considere a seguinte sequência de feixes sobre uma superfície de Riemann compacta X de género $g \geq 1$ (Note que $\underline{\mathbb{C}}^*$ e $\mathcal{O}^*$ são feixes multiplicativos).
$$0 \to \underline{\mathbb{C}}^* \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{\phi} \Omega \to 0,$$
   onde ϕ é o morfismo de feixes que associa a cada elemento $f \in \mathcal{O}^*(U)$, $\quad U \subset X$, a 1-forma holomorfa de expressão local $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$ em $\Omega(U)$. Prove que esta sequência é exacta e determine o mais explicitamente possível os grupos de cohomologia da sequência longa associada.

5. Seja X uma superfície de Riemann compacta de género ≥ 1. Mostre que a aplicação de Abel-Jacobi $A : X \to Jac(X)$ é injectiva e um isomorfismo na sua imagem.

6. Seja X uma superfície de Riemann compacta de género $g \geq 3$ e $\phi_K : X \to \mathbb{P}^{g-1}$ o morfismo assocido ao divisor canónico K. Prove que ϕ_K é um mergulho se e só se X não é hiperelíptica. (Sugestão: verifique que X é hiperelíptica se e só se existe uma aplicação holomorfa $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ de grau 2).

Recorde que um divisor D em X é muito amplo se e só se
$$h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2, \qquad \forall p, q \in X \text{ (não necessariamente distintos).}$$