Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

Exame
30 de Junho de 2008

1. Seja D um divisor na esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, e f uma função meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$, tal que $(f) = D$. Seja $F : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a aplicação holomorfa associada a f.

   (a) Se o suporte de D contém 3 ou mais pontos, prove que F tem pelo menos um ponto de ramificação.

   (b) Se p e q são dois pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, $n \geq 2$, e $D = n \cdot p - n \cdot q$, mostre que os únicos pontos de ramificação de F são precisamente p e q.

2. Seja X a superfície de Riemann hiperelíptica dada pela equação $y^2 = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$, e $\pi : X \to \mathbb{C}_\infty$ a aplicação de grau 2 associada. Sendo f uma função meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f(x,y) = f(x,-y)$, mostre que $ord_{p_k} f$ é par para qualquer $k = 1, ..., n$, onde $p_k = \pi^{-1}(x_k)$.

3. Seja $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$, um torus complexo $\operatorname{Im} \tau > 0$, e $\pi : \mathbb{C} \to X$, a aplicação quociente. Seja $\phi : X \to X$, um automorfismo, com $\phi(\pi(0)) = \pi(0)$.

   (a) Mostre que existe uma aplicação linear invertível $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Phi(z) = az$, $a \in \mathbb{C}^*$, tal que $\phi \circ \pi = \pi \circ \Phi$.

   (b) Prove que $|a| = 1$, e que mais precisamente, $a = \pm 1$ ou $\tau^2 = -1$ ou $\tau^3 = -1$.

4. Considere a sequência de feixes sobre X

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \to 0,$$

   onde $d_U(f) = df$, para uma função $f \in \mathcal{O}(U)$. Prove que esta sequência é exacta e, usando a sequência exacta longa de cohomologia associada, mostre que existe um isomorfismo de grupos:

$$H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong H^1(X, \mathcal{O}) \oplus \Omega^1(X).$$

5. Seja T um divisor associado ao fibrado tangente (holomorfo) de uma superfície de Riemann compacta X, de género g. Para cada inteiro $n \geq 1$, calcule a dimensão do grupo de cohomologia $H^1(X, nT)$.

6. Seja $Div^+_{2g-2}(X)$ o conjunto dos divisores efectivos de grau $2g-2$ numa superfície de Riemann compacta X, de género $g \geq 2$. Cosidere a restrição da aplicação de Abel-Jacobi $A : Div^+_{2g-2}(X) \to Jac(X)$ e mostre que existe um único ponto $\eta \in Jac(X)$ tal que $A^{-1}(\eta)$ é naturalmente isomorfo a um espaço projectivo de dimensão $g-1$.