# Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

## Ficha 1: Exemplos de Superfícies de Riemann. Curvas Afins e Projectivas

1. Sejam $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ e $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ duas cartas complexas num conjunto $X$ (em particular, $\varphi_1$ e $\varphi_2$ são injectivas). Mostre que se $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ é holomorfa (analítica complexa), então $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ também o é. Dê um exemplo em que tal não é válido quando $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ é apenas analítica real.

2. Mostre que uma função holomorfa e bijectiva entre regiões de $\mathbb{C}$ preserva a orientação do plano. Use este resultado para provar que um atlas holomorfo numa variedade diferenciável $X$ define uma orientação em $X$.

3. Mostre que a aplicação $\mathbb{CP}^1 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ que envia $[z : w]$ em
$$\frac{1}{|z|^2 + |w|^2}(2\Re(w\bar{z}), 2\Im(w\bar{z}), |w|^2 - |z|^2)$$
é um homeomorfismo (onde a topologia em $\mathbb{CP}^1$ é a dada pelas cartas canónicas e a de $S^2$ é a induzida por $\mathbb{R}^3$).

4. Mostre que a curva plana afim dada por um polinómio da forma $f(z, w) = w^2 - h(z)$ é não singular se e só se todas as raízes de $h(z)$ são distintas. Mostre que é irredutível se e só se $h(z)$ não é um quadrado perfeito.

5. Seja $X$ uma curva plana afim de grau 2 (i.e, uma *cónica afim*). Mostre que se $X$ é singular, então não é irredutível; nesse caso, verifique que $X$ é, genericamente, a união de duas rectas.

6. Mostre que quaisquer duas rectas distintas em $\mathbb{P}^2$ se intersectam num único ponto.

7. Considere seguintes curvas em $\mathbb{P}^3$
$$\begin{aligned} X &= \left\{[x_0 : \cdots : x_3] : x_0x_3 + 2x_1x_2 = 0, \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\right\} \\ Y &= \left\{[x_0 : \cdots : x_3] : x_0x_3 = x_1x_2, \quad x_0x_2 = x_1^2, \quad x_1x_3 = x_2^2\right\}. \end{aligned}$$
Mostre que ambas são não singulares e que $X$ é uma intersecção completa; mostre que não podemos definir $Y$ com apenas 2 das 3 equações que definem $Y$.

8. Mostre o teorema de Liouville usando o teorema das singularidades removíveis de Riemann.

9. Seja $X = \mathbb{C}/L$ um torus complexo onde $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ para certos números complexos $\omega_1, \omega_2$ com $\Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Mostre que $X$ é naturalmente um grupo abeliano, cujo elemento neutro é a classe de $0 \in \mathbb{C}$, e que é homeomorfo ao produto cartesiano de duas circunferências $S^1$. Seja $\pi : \mathbb{C} \to X$ a aplicação canónica. Mostre que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é meromorfa em $X$ se e só se $f \circ \pi$ é meromorfa em $\mathbb{C}$.

10. Mostre que a função theta de Riemann $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau n^2 + 2\pi i n z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}$, para $\tau \in \mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ (mostre que a série onverge absolutamente e uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$). Mostre que $\theta$ verifica $\theta(z + 1) = \theta(z)$ e $\theta(z + \tau) = e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\theta(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e que os seus únicos zeros estão localizados nos pontos $\frac{1+\tau}{2} + m + n\tau$, $m, n \in \mathbb{Z}$.