Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

Ficha 2: Aplicações holomorfas; Fórmula de Riemann-Hurwitz

1. Sejam $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann e $f \in \mathcal{M}(Y)$. Sendo $p \in X$ mostre que $\mathsf{mult}_p(F \circ G) = \mathsf{mult}_p F \ \cdot \mathsf{mult}_{F(p)} G$ e que $\mathsf{ord}_p(f \circ F) = \mathsf{mult}_p F \ \cdot \mathsf{ord}_{F(p)} f$. Mostre que $\{p \in X : \mathsf{mult}_p F > 1\}$ é discreto.

2. Através de triangulações adequadas, mostre que a esfera, o disco, o cilíndro (fechados) e o torus têm característica de Euler igual a 2,1,0,0, respectivamente.

3. Seja X uma superfície triangulada, conexa, compacta e orientável. Mostre que $H_0(X, \mathbb{Z}) = H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

4. Seja $f(z) = \frac{z^3}{1-z^2}$, e extenda f a uma aplicação F da esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ em si mesma. Determine os pontos p tais que $\mathsf{ord}_p f \neq 0$. Mostre que F tem grau 3 e determine os seus pontos de ramificação. Verifique a fórmula de Riemann-Hurwitz para esta aplicação.

5. Repita o exercício anterior para a função $f(z) = 4z^2 \left(\frac{z-1}{2z-1}\right)^2$, mostrando, neste caso, que o grau de F é 4.

6. Seja $F : X \to Y$ uma aplicação não constante entre superfícies de Riemann. (i) Mostre que se $Y \cong \mathbb{P}^1$ e F tem grau ≥ 2 então F tem que ser ramificada. (ii) Mostre que se X e Y têm género 1, então F não é ramificada.

7. Seja $F : X \to Y$ uma aplicação não constante entre superfícies de Riemann. Mostre que $g(Y) \leq g(X)$; prove que se $g(Y) = g(X) \geq 2$ então F é um isomorfismo.

8. Considere a curva plana de Fermat de grau d: $X_d = \big\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F_d(x, y, z) = 0\big\}$ em que $F_d(x, y, z) = x^d + y^d + z^d$. Seja $\pi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ dada por $\pi : [x : y : z] \mapsto [x : y]$. Mostre que X_d é não singular e que π é uma aplicação holomorfa de grau d. Determine todos os pontos de ramificação de π e mostre que o género de X_d é $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

9. Seja $h(x)$ um polinómio de grau $2g$ com raízes distintas. Defina os seguintes conjuntos $U = \big\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = h(x) \text{ e } x \neq 0\big\}$ e $V = \big\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = k(z) \text{ e } z \neq 0\big\}$ em que $k(z) = z^{2g+2} h(1/z)$. Mostre que a aplicação $\phi : U \to V$ definida por $(z, w) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}}\right)$ é um isomorfismo de superfícies de Riemann.

10. Sejam U e V as curvas planas afins dadas pelas equações $y^2 = 3 + 10x^4 + 3x^8$ e $w^2 = z^6 - 1$, respectivamente, e considere as curvas hiperelípticas associadas $X \supset U$ e $Y \supset V$. Mostre que a função $F : U \to V$ definida por $(z, w) = F(x, y) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}, \frac{2xy}{(1-x^2)^3}\right)$ se extende a uma aplicação holomorfa entre X e Y de grau 2, não ramificada.