Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

Ficha 3: Formas diferenciais e integração

1. Considere a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ com as cartas habituais, sendo $z \in \mathbb{C}$ a coordenada usual. Mostre que não há 1-formas holomorfas em $\mathbb{C}_\infty$ e que se $\omega = f(z)dz$ é uma 1-forma meromorfa então $f(z)$ é uma função racional. Quais os zeros e polos das formas meromorfas definidas por $\omega = dz$ e por $\omega = \frac{dz}{z}$?

2. Seja L um recticulado em $\mathbb{C}$ e $X = \mathbb{C}/L$ um torus complexo. Sendo z a coordenada usual de $\mathbb{C}$, mostre que dz define uma 1-forma holomorfa em X que não se anula.

3. Seja X a curva plana afim definida por $f(u, v) = 0$. Mostre que $p(u, v)du$ e $q(u, v)dv$ definem 1-formas holomorfas em X se p e q são polinómios e definem 1-formas meromorfas em X se p e q são funções racionais. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$ representa, em X, a 1-forma diferencial nula.

4. Seja X a curva hiperelíptica de género $g \geq 1$ definida por $y^2 = h(x)$ (assim, h tem zeros distintos e grau $2g+1$ ou $2g+2$). Mostre que $p(x)dx/y$ é uma 1-forma holomorfa sempre que $p(x)$ é um polinómio de grau $\leq g - 1$. Deduza que $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) \geq g$.

5. Seja $F : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a aplicação definida por $w = F(z) = z^N$ para $N > 1$, usando as coordenadas usuais. Calcule o *pull-back* $F^*(\frac{dw}{w})$, determinando os seus zeros e pólos.

6. Repita o exercício anterior para a projecção canónica $\pi : X \to \mathbb{C}_\infty$ onde X é a curva hiperelíptica dada por $y^2 = h(x)$ e $\omega = \pi^*(dx/h(x))$.

7. Considere o torus complexo X dado pelo recticulado L, e a projecção canónica $\pi : \mathbb{C} \to X = \mathbb{C}/L$. Seja $\gamma : [0, 1] \to X$ definida por $\gamma(t) = \pi(t\ z_0)$ onde $z_0 \in L$. Verifique que γ é uma curva fechada em X e calcule $\int_\gamma dz$ e $\iint_X dz \wedge d\bar{z}$.

8. Seja $h(z)$ uma função elíptica em relação ao recticulado $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ (i.e, $h(z)$ é meromorfa e verifica $h(z) = h(z + 1) = h(z + \tau)$). Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ escolhido de modo a não ser zero ou pólo de h. Mostre que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$
é um elemento do recticulado $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, onde γ é o paralelogramo fechado com vértices em $z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + \tau$ e $z_0 + \tau$ (percorrido nesta ordem).

9. Mostre directamente que a 1-forma meromorfa $r(z)dz$ na esfera de Riemann, em que r é uma função racional, verifica o teorema dos resíduos. Repita para o caso da 1-forma $h(z)dz$ no torus complexo $\mathbb{C}/L$, em que h é uma função elíptica em relação a L.

10. Mostre que o torus complexo $\mathbb{C}/L$ é isomorfo à curva hiperelíptica $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, onde
$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^6}, \qquad L^* = L \setminus \{0\}\,.$$