Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

Ficha 4: Feixes e sequências exactas. Cohomologia de Cech

1. Verifique que os pré-feixes de funções $\mathcal{C}_X^\infty$, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X^*$, $\mathcal{M}_X$, $\mathcal{M}_X^*$, $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{E}_X^k$, $\mathcal{E}_X^{p,q}$, Ω_X^1, $\overline{\Omega}_X^1$, $\mathcal{M}_X^1$, $\mathcal{O}_X(D)$ e $\Omega_X^1(D)$ são de facto feixes (i.e, verificam o axioma de feixe).

2. Mostre que as fibras do feixe localmente constante $\underline{G}$, em que G é um grupo abeliano, são todas isomorfas a G. Descreva as fibras de um feixe arranha-céus.

3. Sendo X uma superfície de Riemann, mostre que as fibras do feixe $\mathcal{O}_X$ são todas isomorfas ao anel $\mathbb{C}\{x\}$ das séries de potências convergentes na variável x (de coeficientes complexos).

4. Mostre que as sequências de feixes descritas nos Exemplos 2.13 a 2.24 do livro (pags. 285 e 286) são, de facto, sequências exactas curtas.

5. Seja ω uma 1-forma meromorfa em X, não identicamente nula. Mostre que a aplicação de multiplicação por ω, $\mu_\omega : \mathcal{O}_X(D) \to \Omega_X^1(D - (\omega))$ é um isomorfismo de feixes.

6. Considere a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ com a cobertura usual $\mathcal{U} = \{U_0 = \mathbb{C},\ U_\infty = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}\}$. Determine, usando a definição, o grupo de cohomologia $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(n \cdot \infty))$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

7. Sendo D um divisor e p um ponto numa superfície de Riemann, prove que se $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) = 0$ então $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$.

8. Em relação a uma superfície de Riemann X, determine o mais explicitamente possível, todos os termos da sequência exacta longa associada à sequência exacta curta

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O} \overset{d=\partial}{\to} \Omega^1 \to 0.$$