# Superfícies de Riemann e Curvas Algébricas

## Ficha 6: Teoremas de Riemann-Roch e de Abel-Jacobi

1. Seja $D$ um divisor numa curva algébrica de género $g$ com grau $2g-2$ e com $\dim \mathcal{O}(D) = g$. Mostre que $D$ é um divisor canónico.

2. Mostre que o subconjunto $\{E \in |D| : E \geq p\} \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}(D))$ coincide exactamente com o conjunto $p + |D - p|$. Verifique ainda que este conjunto é o hiperplano $\mathbb{P}(\mathcal{O}(D-p)) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}(D))$.

3. Seja $D$ um divisor muito amplo numa superfície de Riemann compacta. Mostre que o corpo quociente de $\mathcal{O}(D)$ separa pontos e tangentes de $X$.

4. Mostre que uma curva hiperelíptica é algébrica.

5. Seja $X$ uma curva algébrica de género $g$. Mostre que, se $g \geq 3$, então $mK$ é muito amplo para todo $m \geq 2$, e que, se $g = 2$, $mK$ é muito amplo para todo $m \geq 3$.

6. Prove que a Jacobiana do torus complexo $X = \mathbb{C}/L$ é isomorfa a $X$, mostrando que o seu grupo de períodos $\Lambda \subset \mathbb{C}$ é homotético a $L$ (i.e, $\Lambda = \lambda L$ para certo $\lambda \in \mathbb{C}^*$).

7. Seja $X$ uma superfície de Riemann compacta de género $\geq 1$. Mostre que a aplicação de Abel-Jacobi $A : X \to Jac(X)$ é injectiva.

8. Para qualquer divisor $D$ numa superfície de Riemann compacta $X$, mostre que $A^{-1}(A(D))$ coincide com a classe de equivalência linear de $D$, sendo $A : Div(X) \to Jac(X)$ o homomorfismo de Abel-Jacobi.