SUPERFÍCIES de RIEMANN e CURVAS ALGÉBRICAS

EXAME
9 de Julho de 2002

1. Seja X uma superfície de Riemann compacta e $F : X \to X$ uma aplicação holomorfa não constante. Supondo que F não é ramificada e que não é um isomorfismo, prove que X tem género 1.

2. Seja z a coordenada afim de $\mathbb{C}_\infty$, e p o ponto no infinito (correspondente a $z = \infty$). Prove que existe um isomorfismo de espaços vectoriais $H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}_{n\cdot p}) \cong \mathbb{C}[z]/(z^{n+1})$, onde $\mathbb{C}[z]/(z^{n+1})$ designa o espaço vectorial dos polinómios em z de grau $\leq n$.

3. **a)** Seja $F : X \to Y$ uma aplicação holomorfa entre duas superfícies de Riemann compactas, e $g \in \mathcal{M}(Y)$ uma função meromorfa em Y. Mostre que

$$ord_p(g \circ F) = mult_p F \cdot ord_{F(p)} g,$$

para qualquer ponto $p \in X$.

b) Seja X a superfície de Riemann hiperelíptica dada pela equação $y^2 = h(x)$, onde $h(x)$ é um polinómio com raízes distintas de grau $2n + 1$, $n \geq 2$, e $p \in X$ o ponto correspondente a $x = \infty$.
Mostre que $ord_p f$ é um número par, para qualquer função meromorfa em X, $f \in \mathcal{M}(X)$, que verifique $f(x, y) = f(x, -y)$.

4. Considere a sequência de feixes sobre uma superfície de Riemann compacta X, de género g.

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^* \to 1,$$

onde $\phi_U(f) = e^{2\pi i f}$, para uma função $f \in \mathcal{O}(U)$, e U é um aberto em X.

a) Prove que esta sequência é exacta.

b) Mostre que existe uma sequência exacta de grupos

$$0 \to \mathbb{C}^g / H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

5. Seja D um divisor de grau d numa superfície de Riemann compacta X de género $g \geq 1$.

a) Mostre que se $d \geq 2g$, o sistema linear completo $|D|$ não tem pontos base.

b) Mostre que, se $d \geq 2g + 1$, D é muito amplo.
Recorde que $|D|$ não tem pontos base, e D é muito amplo são condições equivalentes, respectivamente a:

$$h^0(D - p) = h^0(D) - 1$$
$$h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2,$$

para todos os pontos $p, q \in X$.