SUPERFÍCIES de RIEMANN e CURVAS ALGÉBRICAS

Exame
26 de Julho de 2002

1. Designemos por $Pic(X)$ o grupo dos divisores modulo equivalência linear numa superfície de Riemann compacta X, e seja $d : Pic(X) \to \mathbb{Z}$ a aplicação que associa a cada classe de divisores o seu grau. Mostre que d é uma aplicação bem definida, e que quando X é a esfera de Riemann, d é um isomorfismo.

2. Seja $X = \mathbb{C}/\Lambda$ um toro complexo, onde Λ é o recticulado $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, com $\operatorname{Im} \tau > 0$.

   a) Prove que qualquer aplicação holomorfa $F : X \to X$ é não ramificada.

   b) Mostre que o grau d de qualquer aplicação holomorfa $F : X \to X$ é um quadrado, isto é $d = n^2$, para certo $n \in \mathbb{N}$, e construa explicitamente aplicações holomorfas para todos os graus possíveis.

3. Seja X a superfície de Riemann hiperelíptica dada pelo polinómio $y^2 = h(x)$, onde $h(x)$ é um polinómio com raízes distintas de grau $2n + 1$, $n \geq 1$.

   a) Mostre que $w_k = \frac{x^k}{y}dx$ define uma forma diferencial holomorfa em X se $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

   b) Conclua que $\{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ é uma base de $\Omega^1(X)$.

4. Considere a sequência de feixes sobre X

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \to 0,$$

   onde $d_U(f) = df$, para uma função $f \in \mathcal{O}(U)$.

   a) Prove que esta sequência é exacta.

   b) Usando a sequência exacta longa de cohomologia associada, mostre que existe um isomorfismo de grupos

$$H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong H^1(X, \mathcal{O}) \oplus \Omega^1(X).$$

5. Seja D um divisor numa superfície de Riemann compacta X.

   a) Mostre que $h^1(D) = 0$ implica que $h^1(D + p) = 0$, para todo ponto $p \in X$.

   b) Se D for tal que $h^1(D - p - q) = 0$, para todos os pontos $p, q \in X$, mostre que D é muito amplo, isto é, que

$$h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2,$$

   para todos os pontos $p, q \in X$.