UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

FIBRADOS QUASE-PARABÓLICOS SOBRE A RECTA PROJECTIVA

Lígia Isabel Marques Carvalho
(Licenciada)

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática Aplicada

DOCUMENTO PROVISÓRIO

Janeiro 2005

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

FIBRADOS QUASE-PARABÓLICOS SOBRE A RECTA PROJECTIVA

Lígia Isabel Marques Carvalho
(Licenciada)

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática Aplicada

DOCUMENTO PROVISÓRIO

Janeiro 2005

Resumo

Nesta dissertação pretende-se descrever o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados vectoriais algébricos quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com n $(n > 0)$ pontos marcados. Este conjunto tem uma cobertura por um número finito de espaços projectivos e tem a propriedade universal de um espaço de moduli grosseiro. No entanto não é Hausdorff. Será estudado com detalhe o caso de $\mathbb{P}^1$ com 4 pontos marcados. Identificar-se-á explicitamente o espaço moduli para o problema de moduli da classificação das classes de isomorfismo de fibrados quase-parabólicos simples sobre $\mathbb{P}^1$ com 4 pontos marcados, com o mínimo de identificações adicionais que permite obter um espaço quociente Hausdorff.

Palavras-chave:

Fibrados Vectoriais, Fibrados Vectoriais Quase-Parabólicos, Feixes, Cohomologia, Recta Projectiva, Espaço Moduli.

Abstract

In this dissertation we intend to describe the set of the isomorphism classes of simple quasi-parabolic algebraic vector bundles of rank 2 over $\mathbb{P}^1$ with n ($n > 0$) marked points. This set has a covering by a finite number of projective spaces and has the universal property of a coarse moduli space. However it is not Hausdorff. The case of $\mathbb{P}^1$ with 4 marked points will be studied in detail. We will explicitly identify the moduli space for the moduli problem of classifying the isomorphism classes of simple quasi-parabolic vector bundles of rank 2 over $\mathbb{P}^1$ with 4 marked points, with the minimum of additional identifications needed to obtain a Hausdorff quotient space.

Key-words:

Vector Bundles, Quasi-Parabolic Vector Bundles, Sheafs, Cohomology, Projective Line, Moduli Space.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus Pais todo o apoio, carinho e paciência com que sempre me acompanham. O seu incentivo e as suas palavras são muito importantes.

Ao Professor Peter Gothen, que propôs o tema de estudo desta dissertação, estou imensamente reconhecida pela disponibilidade para orientar a sua preparação. Agradeço a sua importante ajuda na escolha de referências apropriadas, nas sugestões e esclarecimentos que permitiram a realização deste trabalho.

Esta dissertação foi co-orientada pelo Professor Carlos Florentino a quem quero agradecer a disponibilidade e compreensão que sempre demonstrou e as sugestões que muito enriqueceram este trabalho.

Agradeço aos meus colegas de mestrado a excelente camaradagem.

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação estudamos os fibrados vectoriais algébricos quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com n $(n > 0)$ pontos marcados. Dada uma curva algébrica $\mathcal{C}$ não singular com n pontos marcados $(n > 0)$, um fibrado vectorial sobre $\mathcal{C}$ diz-se um fibrado quase-parabólico se está munido de uma estrutura quase-parabólica, que consiste em considerarmos bandeiras nas fibras correspondentes aos pontos marcados. Se além disso considerarmos alguns pesos associados a estas bandeiras, munimos o fibrado de uma estrutura parabólica, obtendo-se assim um fibrado parabólico sobre $\mathcal{C}$. A associação de pesos às bandeiras permite definir grau parabólico e consequentemente atribuir sentido às noções de fibrados vectoriais parabólicos semi-estáveis e estáveis, generalizando as correspondentes noções em fibrados vectoriais, que assumem importância na construção do espaço moduli em geral. Os fibrados parabólicos assumiram especial importância na generalização do Teorema de Narasimhan e Seshadri, [NS 65], a curvas algébricas perfuradas, por Mehta e Seshadri, [MS 80].

Os fibrados vectoriais quase-parabólicos são úteis no estudo das propriedades que não dependem dos pesos associados às bandeiras. O objectivo deste trabalho é averiguar até que ponto é possível descrever o espaço moduli sem recorrer à estrutura fornecida pela associação de pesos às bandeiras. O ponto de partida para este estudo foi a secção 8 do artigo de Furuta e Steer [FS 92], onde é feito um estudo do espaço moduli dos fibrados quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com n $(n > 0)$ pontos marcados. Pretendemos, neste trabalho, descrever o conjunto das classes de isomorfismo destes fibrados. Este conjunto tem, de facto, a propriedade universal de um espaço de moduli grosseiro (proposição 4.6) mas, embora admita uma cobertura por um número finito de espaços projectivos não é, em geral, um espaço Hausdorff. Se considerarmos $\mathbb{P}^1$ com quatro pontos marcados, podemos verificar que o espaço Hausdorff obtido deste conjunto, considerando três identificações adicionais, é homeomorfo a $\mathbb{P}^1$. Este estudo será feito no último capítulo da dissertação.

Apresentamos de seguida um breve resumo de cada capítulo.

No **capítulo 1** é introduzida notação e são enunciados alguns resultados importantes da teoria dos fibrados vectoriais sobre uma curva algébrica não singular.

No **capítulo 2** são apresentados os objectos de estudo desta dissertação, os fibrados vectoriais algébricos quase-parabólicos, e são demonstrados alguns resultados que nos permitem conhecer melhor esta classe de fibrados vectoriais.

No **capítulo 3** é feita a classificação dos fibrados vectoriais sobre a recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Esta classificação é feita num teorema conhecido por Teorema de Birkhoff-Grothendieck ou Teorema de Grothendieck. Terminamos o capítulo com a descrição do grupo de automorfismos de um fibrado vectorial de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$.

O **capítulo 4** é o capítulo mais importante desta dissertação. Neste capítulo é descrito o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com n ($n > 0$) pontos marcados. Terminamos o capítulo com um resultado que afirma que este conjunto tem a propriedade universal de um espaço de moduli grosseiro.

O **capítulo 5** aplica a teoria apresentada no capítulo anterior ao estudo do caso de $\mathbb{P}^1$ com 4 pontos marcados. Vemos que, considerando três identificações adicionais no conjunto das classes de isomorfismo de fibrados quase-parabólicos simples, obtemos um espaço Hausdorff homeomorfo a $\mathbb{P}^1$. Construimos assim o espaço moduli para o problema de moduli da classificação de fibrados quase-parabólicos simples a menos de isomorfismo, com essas identificações adicionais.

Capítulo 1

Fibrados Vectoriais Algébricos

Neste capítulo vamos introduzir notação e enunciar alguns resultados que serão usados mais tarde.

Ao longo de toda a dissertação consideraremos como corpo base o corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$, e todas as variedades serão munidas da topologia complexa (Hausdorff).

As principais referências para este capítulo são [P 97], [Mi 97] e [Hart 77].

1.1 Definições

Seja X uma variedade algébrica.

Definição 1.1. Um *fibrado vectorial algébrico de característica r sobre X* é uma variedade algébrica E com uma aplicação regular sobrejectiva $p : E \to X$ de variedades algébricas que verifica:

- Para cada $x \in X$, a fibra sobre x, $p^{-1}(x)$, tem a estrutura de um espaço vectorial complexo de dimensão r. Denotaremos a fibra sobre x por E_x.

- Para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x e um isomorfismo de variedades $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ a que chamamos *trivialização*, tal que para cada $x \in U$ a aplicação induzida $\varphi_x : E_x \to \mathbb{C}^r$ é linear, e o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{C}^r \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$$

Um fibrado vectorial de característica 1 é chamado um *fibrado linha.*

Identificaremos por vezes, cometendo um abuso de notação, o fibrado vectorial E com o morfismo $p : E \to X$.

Denotamos a característica de E por $rk(E)$.

Para cada conjunto aberto $U \subset X$, escrevemos $E|_U$ para indicar a restrição de E a U, $p^{-1}(U) \to U$.

Se $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^r$ e $\varphi_j : E|_{U_j} \to U_j \times \mathbb{C}^r$ são duas trivializações sobre os subconjuntos abertos U_i e U_j respectivamente, então a aplicação definida sobre $U_{ij} = U_i \cap U_j$ por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : & U_{ij} \times \mathbb{C}^r & \to & U_{ij} \times \mathbb{C}^r \\ & (x, v) & \mapsto & (x, g_{ij}(x)v) \end{array}$$

onde $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r, \mathbb{C})$ é uma aplicação de variedades algébricas. As aplicações g_{ij} são chamadas *funções de transição.* Elas satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} a) & g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = Id_{\mathbb{C}^r}, \ \ \forall x \in U_{ij}. \\ b) & g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \ \ \forall x \in U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k. \end{array} \tag{1.1}$$

Seja $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X. Suponhamos que é dada uma colecção de funções $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r, \mathbb{C})$, para $U_{ij} \neq \emptyset$, satisfazendo as condições a) e b) acima. Podemos então construir um fibrado vectorial sobre X com funções de transição $\{g_{ij}\}$.

Consideremos o quociente

$$E = \left(\coprod_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}^r \right) / \sim$$

sob a relação de equivalência $\sim$ que identifica os pontos $(x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^r$ com $(x', v') \in U_j \times \mathbb{C}^r$ quando $x = x'$ e $v' = g_{ij}(x)v$. Consideremos neste conjunto a topologia quociente.

Temos então uma projecção contínua $p : E \to X$ e um homeomorfismo sobre U_i:

$$E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^r. \tag{1.2}$$

Podemos assim dar ao espaço topológico quociente E a estrutura de variedade algébrica induzida da estrutura de variedade algébrica de $U_i \times \mathbb{C}^r$. Sobre U_{ij} as estruturas induzidas de $U_i \times \mathbb{C}^r$ e $U_j \times \mathbb{C}^r$ coincidem. Podemos também transportar a estrutura de espaço vectorial das fibras: esta estrutura de espaço vectorial em E_x não depende do i. Obtemos, assim, um fibrado vectorial $E \to X$ e por definição, o isomorfismo 1.2 dá uma trivialização.

Vimos então que o fibrado vectorial E fica definido pelo seu sistema de funções de transição.

Definição 1.2. Um *morfismo* entre dois fibrados vectoriais E e F sobre X, de características r e s respectivamente, é dado por uma aplicação regular de variedades algébricas $f : E \to F$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

e para cada $x \in X$, $f_x = f|_{E_x} : E_x \to F_x$ é uma aplicação linear de espaços vectoriais.

O morfismo f diz-se um *isomorfismo* entre os dois fibrados vectoriais E e F se é um isomorfismo entre as variedades algébricas E e F tal que para cada $x \in X$, a aplicação f_x é um isomorfismo linear de espaços vectoriais. Dois fibrados vectoriais dizem-se *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles.

Se $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{C}^r$ e $\psi : F|_U \to U \times \mathbb{C}^s$ são trivializações dos fibrados E e F sobre o mesmo conjunto aberto U, então as aplicações $\tilde{f} = \psi f \varphi^{-1} : U \times \mathbb{C}^r \to U \times \mathbb{C}^s$ são as expressões locais de f nas cartas φ e ψ, e são escritas como

$$(x, v) \mapsto (x, g(x)v),$$

onde $g : U \to L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ é uma aplicação de variedades algébricas, de U para o espaço vectorial $L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$ das aplicações lineares $\mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^s$.

É imediato que f é um isomorfismo se e só se todas as suas expressões locais, $\tilde{f}$, são isomorfismos.

Definição 1.3. Um fibrado vectorial $p : E \to X$ diz-se um *fibrado vectorial trivial de característica* r se é isomorfo a $X \times \mathbb{C}^r$, com a estrutura de espaço vectorial standard em $\mathbb{C}^r$, que não depende de $x \in X$.

Definição 1.4. Um *subfibrado* F *de característica* m de um fibrado $p : E \to X$ de característica r $(r \geq m)$ é uma subvariedade $F \subset E$ tal que, para cada $x \in X$, a intersecção $F \cap E_x$ é um subespaço vectorial de E_x de dimensão m e tal que o morfismo induzido

$$p|_F : F \to X$$

é localmente trivial.

Nota 1.5. A inclusão $i : F \to E$ é um morfismo de fibrados.

Definição 1.6. Seja $p : E \to X$ um fibrado vectorial de característica r sobre X. Uma *secção regular* de E sobre um conjunto aberto U é uma aplicação $s : U \to E$ de variedades algébricas tal que $p(s(x)) = x$ para todo $x \in U$.

Localmente, ou seja, composta com uma trivialização $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^r$, s fica definida por uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i(s) = (id, s_i) : & U_i & \to & U_i \times \mathbb{C}^r \\ & x & \mapsto & (x, s_i(x)) \end{array}$$

em que $s_i : U_i \to \mathbb{C}^r$ é uma função regular em U_i.

Seja U um conjunto aberto de X. Designemos por $\mathcal{O}(U)$ a álgebra das funções regulares em U e por $\Gamma(U, E)$ o conjunto das secções regulares de E sobre U. Podemos dar ao conjunto $\Gamma(U, E)$ a estrutura de um módulo sobre a álgebra $\mathcal{O}(U)$. As operações são definidas por

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) \text{ e } (\alpha s)(x) = \alpha(x)s(x)$$

onde $s, t \in \Gamma(U, E)$ e $\alpha \in \mathcal{O}(U)$.

Nota 1.7. Seja $p : E \to X$ um fibrado vectorial de característica r sobre X e $s : X \to E$ uma secção regular global de E. Numa trivialização local $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^r$ do fibrado vectorial, a secção fica:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i(s) : & U_i & \to & U_i \times \mathbb{C}^r \\ & x & \mapsto & (x, s_i(x)) \end{array}$$

e é então definida por uma função regular $s_i : U_i \to \mathbb{C}^r$. No conjunto $U_{ij} = U_i \cap U_j$, estas funções locais estão relacionadas por

$$s_i = g_{ij} s_j,$$

e podemos pensar numa secção global s como uma colecção de funções locais $\{s_i\}$ que se relacionam desta forma. O espaço de todas as secções globais de E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, que denotamos por $\Gamma(X, E)$ ou $H^0(X, E)$.

Exemplo 1.8. Consideremos $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ com a cobertura usual:

$$\begin{aligned} U_0 &= \left\{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 : z_0 \neq 0\right\} = \{[1 : z_1] \in \mathbb{P}^1\} \;\; e \\ U_1 &= \left\{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 : z_1 \neq 0\right\} = \{[z_0 : 1] \in \mathbb{P}^1\} \end{aligned}$$

A função de transição $g_{01}([z_0 : z_1]) = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$ em $U_0 \cap U_1$ define um *fibrado linha* que se denota geralmente por $\mathcal{O}(n)$. Uma secção deste fibrado linha é dada pelas funções s_0 e s_1 em $\mathbb{C}$ relacionadas por

$$s_0 = g_{01} s_1$$

em $U_0 \cap U_1$. Expandindo estas funções como polinómios de Laurent nas suas respectivas coordenadas locais, z_0 e z_1, e usando o facto de $z_0 = \frac{1}{z_1}$, temos, em $U_0 \cap U_1$

$$\sum_{k \geq 0} a_k z_1^k = z_1^n \sum_{k \geq 0} b_k \left(\frac{1}{z_1}\right)^k.$$

Equacionando os coeficientes, encontramos $a_k = b_k = 0$ para $k > n$ e $a_0 = b_n$, $a_1 = b_{n-1}$, ..., $a_n = b_0$. Então a secção global será dada por

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^{n-k} z_1^k,$$

que é um polinómio homogéneo de grau n. Assim, para $n \geq 0$ a dimensão de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$ é $n+1$. Em particular, para $n < 0$ a única secção global é a secção nula.

Construções:

1. Sejam L e $\tilde{L}$ dois fibrados linha sobre X. Podemos formar o seu produto tensorial $L \otimes \tilde{L}$, que é um fibrado linha com funções de transição $g_{ij}(L \otimes \tilde{L}) = g_{ij}(L) g_{ij}(\tilde{L})$. Podemos construir o fibrado dual L^*, também denotado L^{-1}, tendo este funções de transição $g_{ij}(L^*) = g_{ij}^{-1}(L)$. Note-se que $L \otimes L^* \cong I$, onde I denota o fibrado linha trivial (isomorfo a $X \times \mathbb{C}$).

2. Dados dois fibrados vectoriais sobre X, E e $\tilde{E}$ de características r e s respectivamente, podemos formar a sua soma directa $E \oplus \tilde{E}$, tendo este fibrado como funções de transição $g_{ij}(E \oplus \tilde{E}) : U_{ij} \to GL(\mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^s)$ definidas pela matriz $\begin{pmatrix} g_{ij}(E) & 0 \\ 0 & g_{ij}(\tilde{E}) \end{pmatrix}$. Note-se que a característica de $E \oplus \tilde{E}$ é $r + s$.

3. Dados dois fibrados vectoriais sobre X, E e $\tilde{E}$, podemos construir os fibrados $E \otimes \tilde{E}$, $\mathcal{H}om(E, \tilde{E})$, o fibrado dual $E^* := \mathcal{H}om(E, I)$, o produto exterior $\bigwedge^k(E)$. Temos os isomorfismos $\mathcal{H}om(E, \tilde{E}) \cong E^* \otimes \tilde{E}$, $(E \oplus \tilde{E})^* \cong E^* \oplus \tilde{E}^*$ e $(E \otimes \tilde{E})^* \cong E^* \otimes \tilde{E}^*$.

4. Sejam $p : E \to X$ um fibrado vectorial de característica r sobre X e $f : Y \to X$ um morfismo de variedades algébricas. Definimos o *fibrado vectorial pullback* de E via f, f^*E, por
$$f^*E := \{(y, q) \in Y \times E : f(y) = p(q)\}.$$
Este fibrado tem característica r e tem funções de transição $g_{ij}(f^*E) = g_{ij}(E) \circ f$.

5. Seja E um fibrado vectorial de característica r sobre X. O produto exterior mais alto forma um fibrado linha denominado *fibrado linha determinante* de E: $det(E) = \bigwedge^r(E)$. Este fibrado linha tem como funções de transição $det(g_{ij}(E))$.

1.2 Fibrados Vectoriais e Feixes

Vimos que as secções de fibrados vectoriais são dadas por funções regulares s_i em U_i e que fibrados vectoriais são também dados por funções de transição g_{ij} em $U_i \cap U_j$. Iremos usar a tecnologia da teoria de feixes e da sua cohomologia para trabalharmos globalmente com estas noções.

Definição 1.9. Seja X um espaço topológico. Um *pré-feixe de grupos* $\mathcal{F}$ em X é uma colecção de grupos $\mathcal{F}(U)$, um para cada subconjunto aberto $U \subseteq X$, e uma colecção de homomorfismos de grupos $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ para $V \subseteq U$, tal que

- $\mathcal{F}(\varnothing)$ é o grupo trivial com um elemento,
- $\rho_U^U = id$ em $\mathcal{F}(U)$, e
- se $W \subseteq V \subseteq U$, então $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.

Os homomorfismos ρ_V^U são chamados as *aplicações restrição* do pré-feixe. Os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são geralmente chamados as *secções de $\mathcal{F}$ sobre U*. Os elementos de $\mathcal{F}(X)$, que são as secções de $\mathcal{F}$ sobre todo o espaço X, são chamados as *secções globais de $\mathcal{F}$*.

Podemos também considerar a noção de pré-feixe de anéis, onde cada grupo $\mathcal{F}(U)$ é, de facto, um anel, e as aplicações restrição são homomorfismos de anéis.

Definição 1.10. Um *feixe* sobre um espaço topológico X é um pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre X que, para cada aberto U de X e cobertura aberta $\{U_i\}$ de U, satisfaz o axioma de feixe, ou seja, dados $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que $\rho_{U_{ij}}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_{ij}}^{U_j}(s_j)$ para todos i e j, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j$, então existe uma única secção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^{U}(s) = s_i$ para cada i.

Exemplo 1.11. Seja X é uma variedade algébrica. O feixe $\mathcal{O}_X$ sobre X, com $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \ \textit{regulares}\}$, chamado *feixe de estrutura* ou *feixe de funções regulares em X*, é um feixe de $\mathbb{C}$-álgebras, em particular é um feixe de anéis. Quando não existir dúvida na variedade considerada, representaremos este feixe simplesmente por $\mathcal{O}$.

Definição 1.12. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois pré-feixes sobre um espaço topológico X. Um *morfismo* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre os pré-feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é uma colecção de homomorfismos

$$\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U),$$

para todo o subconjunto aberto U de X, que comuta com as aplicações restrição dos dois pré-feixes, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & (\rho')_V^U \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

comuta, onde $V \subset U$ é um subconjunto aberto, ρ e ρ' são as aplicações restrição de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ respectivamente. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes em X, a aplicação ϕ diz-se um morfismo de feixes.

Definição 1.13. Seja $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes sobre um espaço topológico X. O *pré-feixe núcleo*, $\mathcal{K}$, de ϕ é o pré-feixe dado por $\mathcal{K}(U) = ker(\phi(U))$ e o *pré-feixe imagem*, $\mathcal{I}$, de ϕ é o pré-feixe dado por $\mathcal{I}(U) = im(\phi(U))$, para U subconjunto aberto de X.

Note-se que se $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes, então o pré-feixe núcleo de ϕ é um feixe, mas o pré-feixe imagem de ϕ não é, em geral, um feixe. Podemos considerar, no entanto, um feixe associado ao pré-feixe imagem de ϕ. Remetemos o leitor para a referência [Hart 77].

Definição 1.14. Uma sequência de feixes de grupos abelianos

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

diz *exacta* se $im\varphi_i = ker\varphi_{i+1}$ para todo i.

Uma sequência exacta de feixes da forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

diz-se uma *sequência exacta curta.*

Definição 1.15. Dizemos que a sequência exacta (1.3) *se cinde* se qualquer uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:

i) Existe uma aplicação $\alpha : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_2$ tal que $\varphi_2 \circ \alpha = id_{\mathcal{F}_3}$.

ii) Existe uma aplicação $\beta : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ tal que $\beta \circ \varphi_1 = id_{\mathcal{F}_1}$.

iii) O feixe $\mathcal{F}_2$ é isomorfo à soma directa de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_3$.

Definição 1.16. Seja $\mathcal{A}$ um feixe de anéis num espaço topológico X. Um *feixe de $\mathcal{A}$-módulos* é um feixe de grupos abelianos $\mathcal{M}$ tal que para qualquer subconjunto aberto U de X o conjunto $\mathcal{M}(U)$ é um $\mathcal{A}(U)$-módulo e a restrição respeita a multiplicação, isto é, $(a \cdot m)|_V = a|_V \cdot m|_V$ para V aberto em U.

Definição 1.17. Um feixe de $\mathcal{A}$-módulos isomorfo ao feixe $\mathcal{A}^k$, a soma directa de $\mathcal{A}$ consigo próprio k vezes, chama-se *feixe livre de característica k*.

Definição 1.18. Um feixe de $\mathcal{A}$-módulos, $\mathcal{M}$, diz-se *localmente livre* se existe uma cobertura aberta $X = \bigcup U_i$ tal que os feixes restrição $\mathcal{M}|_{U_i}$ são feixes de $\mathcal{A}|_{U_i}$-módulos livres. Um feixe de $\mathcal{A}$-módulos localmente livre diz-se de *característica k* se todos os $\mathcal{M}|_{U_i}$ têm característica k. Um feixe de $\mathcal{A}$-módulos localmente livre de característica um diz-se *invertível.*

Exemplo 1.19. Se E é um fibrado vectorial de característica r sobre uma variedade algébrica X, o feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X, $\mathcal{O}_X(E)$, com $\mathcal{O}_X(E)(U) = \Gamma(U, E)$, é localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^r$, pelo que é um feixe localmente livre de característica r. Em particular, tendo em conta a nota 1.7, $\mathcal{O}_X(I) \cong \mathcal{O}_X$, onde I denota o fibrado linha trivial sobre X. Quando não existir dúvida na variedade considerada representaremos este feixe simplesmente por $\mathcal{O}(E)$ e designá-lo-emos por *feixe das secções regulares de E sobre X.*

Proposição 1.20. *O functor que associa o feixe de módulos de secções regulares a um fibrado vectorial E é uma equivalência de categorias entre a categoria dos fibrados vectoriais algébricos sobre X e a categoria dos feixes localmente livres de característica finita em X.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [P 97, Capítulo 1 (1.8)].

Tendo em conta o exemplo 1.19 e a proposição 1.20 anteriores, vemos que dado um feixe localmente livre de característica r em X, podemos identificá-lo com um fibrado vectorial algébrico de característica r sobre X. Em particular, os fibrados linha sobre X podem ser identificados com os feixes invertíveis em X. Por causa disto, e quando não resultar qualquer confusão, usaremos indiferentemente as palavras "fibrado vectorial"e "feixe localmente livre", identificando o fibrado vectorial E com o feixe das secções regulares de E sobre X, $\mathcal{O}(E)$.

1.3 Cohomologia

Se X é um espaço topológico e $\mathcal{M}$ é um feixe de grupos abelianos em X, podemos construir os grupos de cohomologia $H^p(X, \mathcal{M})$ com coeficientes em $\mathcal{M}$. Consideremos uma cobertura aberta $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X, com I totalmente ordenado. Para qualquer colecção de índices $(i_0, \ldots, i_p)$, com $p \geq 0$, denotemos a intersecção dos correspondentes subconjuntos abertos por

$$U_{i_0,\ldots,i_p} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$$

e consideremos

$$U_{i_0,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_p} = U_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1}\ldots,i_p}.$$

Sejam

$$\begin{aligned} C^0(\underline{U}, \mathcal{M}) &= \prod_i \mathcal{M}(U_i) \\ C^1(\underline{U}, \mathcal{M}) &= \prod_{i<j} \mathcal{M}(U_{i,j}) \\ &\vdots \\ C^p(\underline{U}, \mathcal{M}) &= \prod_{i_0<i_1<\ldots<i_p} \mathcal{M}(U_{i_0,i_1,\ldots,i_p}). \end{aligned}$$

Nota 1.21. Um elemento σ de $C^p(\underline{U}, \mathcal{M})$ é determinado dando um elemento

$$\sigma_{i_0,\ldots,i_p} \in \mathcal{M}(U_{i_0,i_1,\ldots,i_p}),$$

para cada $(i_0, \ldots, i_p)$ onde $i_0 < \ldots < i_p$ são elementos de I.

Pode definir-se, de forma natural, $\sigma_{i_0,\ldots,i_p}$ para $(i_0, \ldots, i_p)$ que não satisfazem $i_0 < \ldots < i_p$. Se existe um índice repetido no conjunto $\{i_0, \ldots, i_p\}$, definimos $\sigma_{i_0,\ldots,i_p} = 0$. Se os índices são todos distintos, definimos $\sigma_{i_0,\ldots,i_p} = (-1)^\tau \sigma_{\tau i_0,\ldots,\tau i_p}$, onde τ é a permutação para a qual $\tau i_0 < \ldots < \tau i_p$.

Definição 1.22. Um elemento σ de $C^p(\underline{U}, \mathcal{M})$ é chamado uma *p-cocadeia* de $\mathcal{M}$ sobre a cobertura aberta $\underline{U}$.

Definição 1.23. O *operador cobordo* é a aplicação

$$\delta : C^p(\underline{U}, \mathcal{M}) \to C^{p+1}(\underline{U}, \mathcal{M})$$

definido pela fórmula

$$(\delta\sigma)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \ \rho^{U_{i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{p+1}}}_{U_{i_0,\ldots,i_j,\ldots,i_{p+1}}} (\sigma_{i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{p+1}})$$

Em particular, se $\sigma = \{\sigma_{i,j}\} \in C^1(\underline{U}, \mathcal{M})$, $(\delta\sigma)_{i,j,k} = \sigma_{i,j} + \sigma_{j,k} - \sigma_{i,k}$ em $U_{i,j,k}$.

Definição 1.24. Uma p-cocadeia $\sigma \in C^p(\underline{U}, \mathcal{M})$ é chamada um *p-cociclo* se $\delta\sigma = 0$ e é chamada um *p-cobordo* se $\sigma = \delta\tau$ para algum $\tau \in C^{p-1}(\underline{U}, \mathcal{M})$.

Um cálculo simples demonstra a seguinte proposição.

Proposição 1.25. $\delta^2 = 0$.

Como $\delta^2 = 0$, vemos que um cobordo é um cociclo. Podemos então fazer a seguinte definição.

Definição 1.26. O *p-ésimo grupo de cohomologia de $\mathcal{M}$ em relação a $\underline{U}$* é

$$H^p(\underline{U}, \mathcal{M}) := \frac{Z^p(\underline{U}, \mathcal{M})}{im(\delta : C^{p-1} \to C^p)}$$

onde $Z^p(\underline{U}, \mathcal{M}) = ker(\delta : C^p \to C^{p+1})$.

Estes grupos de cohomologia dependem da cobertura considerada. A definição de grupos de cohomologia que sejam independentes da cobertura pode ser feita considerando o limite directo sobre o conjunto de todas as coberturas de X parcialmente ordenado por refinamento. Denotamos o *p-ésimo grupo de cohomologia de $\mathcal{M}$ sobre X* por

$$H^p(X, \mathcal{M}) := \varinjlim_{\underline{U}} H^p(\underline{U}, \mathcal{M}).$$

Para uma exposição mais detalhada remetemos o leitor a [Mi 97] ou a [Hart 77].

Exemplo 1.27. Consideremos uma curva algébrica não singular $\mathcal{C}$ e uma cobertura aberta de $\mathcal{C}$, $\underline{U} = \{U_i\}$. Sejam L um fibrado linha sobre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{O}(L)$ o feixe das secções regulares de L.

1. Seja $f = \{f_i\} \in C^0(\underline{U}, \mathcal{O}(\mathcal{L}))$. Então $(\delta f)_{ij} = f_j - f_i$ em $U_i \cap U_j$. Assim, δf é nula se as secções locais f_i se juntam para dar uma secção global, ou seja, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) = ker\delta$ é o espaço das secções regulares globais de L, $\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L))$ (conferir nota 1.7).

2. Suponhamos agora que L tem funções de transição $\{g_{ij}\}$, relativamente a $\{\varphi_i\}$, onde $\varphi_i : L|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}$ são as trivializações locais de fibrado. As funções de transição $\{g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)\}$ representam uma 1-cocadeia de $\mathcal{O}^*$, o feixe das funções regulares não nulas em $\mathcal{C}$. Considere-se o grupo $\mathcal{O}^*(U)$ com a operação multiplicação. As condições(1.1) satisfeitas pelas funções de transição dizem-nos apenas que $\delta(\{g_{ij}\}) = 1$, isto é, $\{g_{ij}\}$ é um 1-cociclo, $\{g_{ij}\} \in Z^1(\underline{U}, \mathcal{O}^*)$.

   As trivializações φ_i não são únicas. Considere-se trivializações alternativas de L sobre $\underline{U}$:

   $$\varphi'_i = h_i \varphi_i$$

   para $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ uma qualquer colecção de funções regulares não nulas. Temos funções de transição g'_{ij} para L relativamente a $\{\varphi'_i\}$ dadas por:

   $$g'_{ij} = \varphi'_i(\varphi'_j)^{-1} = h_i g_{ij} h_j^{-1} \tag{1.4}$$

   Como qualquer trivialização de L sobre $\underline{U}$ pode ser obtida da maneira acima, vemos que colecções $\{g_{ij}\}$ e $\{g'_{ij}\}$ de funções de transição definem o mesmo fibrado linha se e só se existem funções $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ satisfazendo 1.4, isto é, $g'_{ij} g_{ij}^{-1} = h_i h_j^{-1} = (\delta h)_{ij}$, ou seja, a diferença $\{g'_{ij} \cdot g_{ij}^{-1}\}$ é um 1-cobordo. Consequentemente, vemos que as classes de isomorfismo de fibrados linha numa curva algébrica não singular são dadas por elementos do grupo de cohomologia de feixes $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}^*)$. Assim, $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}^*)$ é o *grupo de Picard*, $Pic(\mathcal{C})$, das classes de isomorfismo dos fibrados linha (a estrutura de grupo de $Pic(\mathcal{C})$ é dada pelo produto tensorial, propriedade 1 da página 8).

Enunciaremos agora, sem demonstrar, um teorema que iremos usar no nosso estudo.

Teorema 1.28. *Seja X um espaço topológico paracompacto e seja*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

uma sequência exacta curta de feixes de grupos abelianos sobre X. Então existe uma sequência exacta longa de grupos de cohomologia associada:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \dots \end{array}$$

1.4 Fibrados Vectoriais sobre Curvas Algébricas

Neste trabalho vamos focar o estudo essencialmente em fibrados sobre a variedade $\mathbb{P}^1$, que é uma curva algébrica não singular de género 0. Vejamos alguns resultados conhecidos de fibrados sobre curvas algébricas não singulares.

Seja agora $\mathcal{C}$ uma curva algébrica não singular de género $g \geq 0$.

Pretendemos definir o grau de um fibrado vectorial de característica r sobre $\mathcal{C}$. Iremos enunciar alguns resultados que nos conduzirão a esta definição.

Não vamos expor detalhadamente a teoria de divisores numa curva algébrica, remetemos o leitor a [Mi 97].

Denotemos por $Div(\mathcal{C})$ o grupo dos divisores de $\mathcal{C}$ (a estrutura de grupo é dada pela soma de divisores).

Seja $k(\mathcal{C})$ o corpo das funções racionais em $\mathcal{C}$. Representemos por $div(f)$ o divisor de uma função racional não nula, $f \in k(\mathcal{C})^{\times}$:

$$div(f) = \sum_{p} ord_p(f) \cdot p.$$

Qualquer divisor desta forma é chamado um *divisor principal em* $\mathcal{C}$.

Cada divisor, D, na curva $\mathcal{C}$ determina um feixe invertível, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$, em $\mathcal{C}$. Seja

$$D = \sum_{p \in \mathcal{C}} D(p) \cdot p$$

um divisor na curva $\mathcal{C}$. O feixe $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ é o *feixe das funções racionais com pólos limitados por* D:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U) = \{f \in k(\mathcal{C})^{\times} : div(f) \geq -D \ \ em \ \ todos \ \ os \ \ pontos \ \ de \ \ U\} \cup \{0\}$$

ou seja, $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U)$ se, para todo o $p \in U$, f tem um pólo em p com multiplicidade menor ou igual a $D(p)$ se $D(p) > 0$, e f tem um zero com multiplicidade maior ou igual a $-D(p)$ se $D(p) \leq 0$. Desta forma, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U)$ é um $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(U)$-módulo, e se $U \subset U'$ então $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U') \subset \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U)$. Definimos a aplicação restrição por esta inclusão. Assim, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ é um feixe de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$-módulos. Suponhamos que D é um divisor principal num subconjunto aberto $U \subset \mathcal{C}$, seja $D|_U = div(g)$ para alguma função racional não nula g. Então

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U) = \{f \in k(\mathcal{C})^{\times} : div(fg) \geq 0 \ \ em \ \ U\} \cup \{0\}.$$

Portanto temos um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)(U) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(U) \\ f & \mapsto & fg \end{array}.$$

Estes isomorfismos comutam com as aplicações restrição para $U' \subset U$, pelo que obtemos um isomorfismo

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)|_U \stackrel{\cong}{\rightarrow} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}|_U.$$

Como qualquer divisor D é localmente principal, concluimos que $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ é localmente isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, ou seja, é um feixe invertível. Se D é mesmo um divisor principal, então $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ é trivial.

Tendo em conta a proposição 1.20 concluímos que cada divisor, D, na curva $\mathcal{C}$ determina um fibrado linha, L_D, identificado com o feixe invertível $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$.

O número

$$deg(D) = \sum_p D_p$$

é chamado o *grau de* D.

Lema 1.29. *Todo o fibrado linha L sobre uma curva $\mathcal{C}$ é isomorfo a L_D para algum $D \in Div(\mathcal{C})$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Mu 03, Capítulo 9 (9.2)].

Nota 1.30. Os fibrados L_D e $L_{D'}$ são isomorfos se e só se D e D' são linearmente equivalentes, isto é, diferem por um divisor principal.

Definição 1.31. Seja L um fibrado linha sobre $\mathcal{C}$. O *grau de* L, denotado por $deg(L)$, é

$$deg(L) = deg(D)$$

onde $L \cong L_D$.

Definição 1.32. Seja E um fibrado vectorial de característica r sobre $\mathcal{C}$. O *grau de* E é definido por

$$deg(E) = deg(det(E)).$$

Propriedades:

1. Sejam L_D e $L_{D'}$ dois fibrados linha de $\mathcal{C}$ associados aos divisores D e D' respectivamente. Então

$$L_D \otimes L_{D'} \cong L_{D+D'}, \qquad L_D^{-1} \cong L_{-D}. \tag{1.5}$$

   Daqui segue que dados dois fibrados linha sobre $\mathcal{C}$, L e $\tilde{L}$, o grau satisfaz

$$deg(L \otimes \tilde{L}) = degL + deg\tilde{L}, \qquad degL^{-1} = -degL.$$

Os isomorfismos (1.5) permitem-nos definir um homomorfismo de grupos:

$$\begin{array}{ccc} Div(\mathcal{C}) & \to & Pic(\mathcal{C}) \\ D & \mapsto & L_D. \end{array}$$

Como $L_D \cong I$, onde I é o fibrado linha trivial, se e só se D é um divisor principal, concluimos que

$$Pic(\mathcal{C}) \cong Div(\mathcal{C})/PDiv(\mathcal{C})$$

onde $PDiv(\mathcal{C})$ denota o subgrupo dos divisores principais em $\mathcal{C}$.

2. Se um fibrado linha L sobre $\mathcal{C}$ tem uma secção $s \in H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L))$ que se anula nos pontos $p_1, \ldots, p_n$ com multiplicidade $m_1, \ldots, m_n$ então $L \cong L_D$ onde $D = div(s) = \sum m_i \cdot p_i$, pelo que $degL = degD = \sum m_i$. O grau de L é independente da secção considerada.

3. Sejam E e $\tilde{E}$ dois fibrados vectoriais sobre $\mathcal{C}$, com características r e $\tilde{r}$ respectivamente. Então

$$det(E \otimes \tilde{E}) = det(E) \otimes det(\tilde{E}),$$
$$det(E \otimes \tilde{E}) = (detE)^{\otimes \tilde{r}} \otimes det(\tilde{E})^{\otimes r}.$$

Daqui segue que o grau satisfaz

$$deg(E \oplus \tilde{E}) = degE + deg\tilde{E},$$
$$deg(E \otimes \tilde{E}) = \tilde{r}degE + rdeg\tilde{E}.$$

Exemplo 1.33. No exemplo 1.8, construímos o fibrado linha $\mathcal{O}(n)$ em $\mathbb{P}^1$, com $n \geq 0$, usando a função de transição $\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$ em $U_0 \cap U_1$ onde $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ é a cobertura usual. Além disso, vimos que uma secção $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$ é dada por um polinómio homogéneo de grau n. Consideremos uma secção global deste fibrado, por exemplo, a secção $s = z_0^n$. O divisor associado a esta secção é $D = n \cdot p$, com $p = [0:1]$, pelo que $\mathcal{O}(n) \cong L_D$, e assim $deg(\mathcal{O}(n)) = deg(D) = n$. Denotemos $\mathcal{O}(n)^*$ por $\mathcal{O}(-n)$. Note-se que $deg(\mathcal{O}(-n)) = deg(\mathcal{O}(n)^*) = -n$.

Seja E um fibrado vectorial de característica r sobre $\mathcal{C}$. Usando a identificação de E com o feixe das secções regulares de E sobre $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}(E)$, o grupo de cohomologia $H^i(\mathcal{C}, \mathcal{O}(E))$ será escrito $H^i(\mathcal{C}, E)$.

Usaremos a notação $h^i(E) = dimH^i(\mathcal{C}, E)$.

Enunciaremos agora, sem demonstração, dois teoremas fundamentais na teoria dos fibrados vectoriais sobre curvas algébricas não singulares.

Denotemos por K o fibrado cotangente das 1-formas sobre $\mathcal{C}$, chamado *fibrado linha canónico.*

Teorema 1.34 (Dualidade de Serre). *Se E é um fibrado vectorial numa curva algébrica não singular $\mathcal{C}$, então existe um isomorfismo natural*

$$H^1(\mathcal{C}, E) \cong H^0(\mathcal{C}, K \otimes E^*)^*.$$

Para a demonstração deste teorema remetemos o leitor a [Hart 77, Capítulo III (7)].

Teorema 1.35 (Riemann-Roch). *Se $\mathcal{C}$ for uma curva algébrica não singular de género g e E um fibrado vectorial de característica r sobre $\mathcal{C}$, temos:*

$$h^0(E) - h^1(E) = degE + r(1 - g).$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Mu 03, Capítulo 10 (10.1)].

Capítulo 2

Fibrados Vectoriais Quase-Parabólicos

Neste capítulo são apresentados os fibrados vectoriais quase-parabólicos e alguns resultados que nos permitem conhecer melhor esta classe de fibrados vectoriais. Terminamos o capítulo com a definição de fibrados vectoriais parabólicos, uma noção importante que é necessária para a construção do espaço moduli em geral.

Definição 2.1. Seja V um espaço vectorial complexo de dimensão r. Uma *bandeira descendente* de V é uma filtração por subespaços vectoriais:

$$V = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset V_{k+1} = \{0\},$$

com $k \in \mathbb{N}$. Chamamos *tipo da bandeira* ao vector $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ onde a *multiplicidade* m_i é $m_i = dimV_i - dimV_{i+1}$, para $1 \leq i \leq k$. Designemos por $\mathbb{F}(V, \overrightarrow{m})$ o conjunto das bandeiras de V de tipo $\overrightarrow{m}$, a que chamamos uma *variedade bandeira*.

Esta terminologia é justificada pelo facto de poder ser dada uma estrutura de variedade a $\mathbb{F}(V, \overrightarrow{m})$. ([Harr 92])

Exemplo 2.2. O espaço projectivo de dimensão r sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^r$, pode ser interpretado como o conjunto das bandeiras de $\mathbb{C}^{r+1}$ de tipo $(r, 1)$:

$$\mathbb{C}^{r+1} = V_1 \supset V_2 \supset \{0\},$$

onde V_2 é um subespaço vectorial complexo de dimensão 1. A variedade bandeira $\mathbb{F}(\mathbb{C}^{r+1}, (r, 1))$ pode então ser vista como $\mathbb{P}^r$.

Exemplo 2.3. Sejam $B = (e_1, \ldots, e_r)$ a base canónica de $\mathbb{C}^r$ e $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $m_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Podemos definir em $\mathbb{C}^r$ uma bandeira $\xi(B)$, de tipo $\overrightarrow{m}$, dada por:

$$\xi(B) = \xi(B)_1 \supset \xi(B)_2 \supset \ldots \supset \xi(B)_k \supset \{0\},$$

onde $\xi(B)_j = \mathbb{C}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_{\beta_j}$ para $\beta_j = dim\xi(B)_j = m_j + m_{j+1} + \ldots + m_k$, $1 \leq j \leq k$. Vamos designar esta bandeira por *bandeira standard de tipo* $\overrightarrow{m}$ *em* $\mathbb{C}^r$.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva algébrica não singular de género g.

Definição 2.4. Seja $\{p_i\}_{i=1}^n$ um conjunto finito não vazio de pontos distintos de $\mathcal{C}$. Um *fibrado quase-parabólico* E de característica r sobre $\mathcal{C}$ com pontos marcados p_i é um fibrado vectorial algébrico E_0 sobre $\mathcal{C}$ equipado com uma *estrutura quase-parabólica*, ou seja, para cada ponto p_i temos uma bandeira descendente de $(E_0)_{p_i}$, isto é, $(E_0)_{p_i}$ está munida de uma filtração por subespaços vectoriais:

$$(E_0)_{p_i} = E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \ldots \supset E_{p_i,r_{p_i}} \supset E_{p_i,r_{p_i}+1} = \{0\}.$$

Denotamos o tipo da bandeira sobre p_i pelo vector $\vec{m}_{p_i} = (m_{p_i,1}, \ldots, m_{p_i,r_{p_i}})$ onde a multiplicidade $m_{p_i,k}$ é $m_{p_i,k} = dim(E_{p_i,k}) - dim(E_{p_i,k+1})$, para $1 \leq k \leq r_{p_i}$.

Chamamos *dados quase-parabólicos* do fibrado ao sistema $(\vec{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$.

Cometeremos, por vezes, o abuso de notação de identificar E e E_0.

Definição 2.5. Sejam E e F dois fibrados quase-parabólicos sobre $\mathcal{C}$ com pontos marcados $p_1, \ldots, p_n$. Dizemos que um isomorfismo de fibrados vectoriais algébricos $\psi : E \to F$ é um *isomorfismo quase-parabólico* se para todo o ponto marcado p_i com a estrutura quase-parabólica sobre E dada por

$$E_{p_i} = E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \ldots \supset E_{p_i,r_{p_i}} \supset \{0\}$$

e a estrutura quase-parabólica sobre F dada por

$$F_{p_i} = F_{p_i,1} \supset F_{p_i,2} \supset \ldots \supset F_{p_i,r_{p_i}} \supset \{0\}$$

temos que $\psi(E_{p_i,j}) = F_{p_i,j}$, para todo $1 \leq j \leq r_{p_i}$.

Proposição 2.6. *Sejam $p_1, \ldots, p_n$ pontos marcados de $\mathcal{C}$ e seja E um fibrado vectorial algébrico de característica r sobre $\mathcal{C}$, com o sistema de dados quase-parabólicos $(\overrightarrow{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$. As estruturas quase-parabólicas de E são parametrizadas pelo produto de variedades bandeira*

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{n} \left(Iso\left(\mathbb{C}^r, E_{p_i}\right)/B_i \right),$$

onde $Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$ é o conjunto dos isomorfismos de $\mathbb{C}^r$ para E_{p_i} e B_i é o subgrupo parabólico de $GL(r, \mathbb{C})$ que deixa invariante a bandeira standard de tipo $\overrightarrow{m}_{p_i}$ em $\mathbb{C}^r$.

Demonstração. Consideremos a fibra E_{p_i} munida de uma filtração por subespaços vectoriais:

$$E_{p_i} = E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \ldots \supset E_{p_i,r_{p_i}} \supset \{0\}.$$

Seja

$$\beta_j = dim E_{p_i,j} = m_{p_i,j} + m_{p_i,j+1} + \ldots + m_{p_i,r_{p_i}}, \quad 1 \leq j \leq r_{p_i}.$$

Consideremos uma base de E_{p_i}, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$. Seja

$$\xi(\varepsilon)_j = \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\varepsilon_{\beta_j}$$

e denotemos por $\xi(\varepsilon)$ a bandeira de tipo $\overrightarrow{m}_{p_i}$ em E_{p_i} associada à base ε:

$$\xi(\varepsilon) = \xi(\varepsilon)_1 \supset \xi(\varepsilon)_2 \supset \ldots \xi(\varepsilon)_{r_{p_i}} \supset \{0\}.$$

Note-se que qualquer bandeira de E_{p_i} é desta forma para alguma base de E_{p_i}. Sejam $B = (e_1, \ldots, e_r)$ a base canónica de $\mathbb{C}^r$ e $g \in Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$. Podemos construir a aplicação

$$\begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i}) & \to & \mathbb{F}(E_{p_i}, \overrightarrow{m}_{p_i}) \\ g & \mapsto & \xi(\varepsilon_g) \end{array}$$

onde $\varepsilon_g = (g(e_1), \ldots, g(e_r))$ é a base de E_{p_i} associada ao isomorfismo g. Esta aplicação é sobrejectiva mas não é injectiva. Vejamos que induz uma aplicação injectiva. Consideremos o grupo $GL(r, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C}^r \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^r\}$ e a acção à direita deste grupo em $Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$ dada por

$$g \cdot f := g \circ f, \tag{2.1}$$

com $g \in Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$ e $f \in GL(r, \mathbb{C})$. Esta acção induz uma acção à direita de $GL(r, \mathbb{C})$ em $\mathbb{F}(E_{p_i}, \overrightarrow{m}_{p_i})$:

$$\xi(\varepsilon_g) \cdot f := \xi(\varepsilon_{g \cdot f}). \tag{2.2}$$

Seja $g \in Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$ e consideremos a bandeira associada a g, $\xi(\varepsilon_g) \in \mathbb{F}(E_{p_i}, \overrightarrow{m}_{p_i})$. O estabilizador, pela acção (2.2), de $\xi(\varepsilon_g)$ é

$$Stab(\xi(\varepsilon_g)) = \{f \in GL(r, \mathbb{C}) : \xi(\varepsilon_{g \cdot f}) = \xi(\varepsilon_g)\}.$$

Logo temos $\mathbb{F}(E_{p_i}, \overrightarrow{m}_{p_i}) \cong Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})/Stab(\xi(\varepsilon_g))$. Note-se que $g^{-1}(\xi(\varepsilon_g))$ é a bandeira standard de tipo $\overrightarrow{m}_{p_i}$ em $\mathbb{C}^r$, ou seja, $g^{-1}(\xi(\varepsilon_g)) = \xi(B)$, onde

$$\xi(B) = \xi(B)_1 \supset \xi(B)_2 \supset \ldots \supset \xi(B)_{r_{p_i}} \supset \{0\},$$

com $\xi(B)_j = \mathbb{C}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}e_{\beta_j}$. Temos que $\xi(B) \in \mathbb{F}(\mathbb{C}^r, \overrightarrow{m}_{p_i})$. Consideremos a acção à direita, análoga à acção (2.2), de $GL(r, \mathbb{C})$ em $\mathbb{F}(\mathbb{C}^r, \overrightarrow{m}_{p_i})$ dada por

$$\xi(\varepsilon_g) \cdot f := \xi(\varepsilon_{g \cdot f}),$$

onde $f, g \in GL(r, \mathbb{C})$ e $\varepsilon_g = (g(e_1), \ldots, g(e_r))$ é a base de $\mathbb{C}^r$ associada ao isomorfismo g. Note-se que $\xi(B) = \xi(\varepsilon_{Id})$, $Id \in GL(r, \mathbb{C})$. Assim,

$$Stab(\xi(B)) = Stab(\xi(\varepsilon_g)), \tag{2.3}$$

considerando as respectivas acções de $GL(r, \mathbb{C})$. Além disso, $Stab(\xi(B))$ é o subgrupo das matrizes invertíveis $r \times r$ da forma

$$\begin{pmatrix} A_{r_{p_i}} & * & \ldots & & * \\ 0 & A_{r_{p_i-1}} & & \ldots & * \\ \ldots & 0 & & & \vdots \\ & \ldots & & \ddots & * \\ 0 & & \ldots & 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

onde $A_j \in GL(m_{p_i,j}, \mathbb{C})$. Tal grupo de matrizes é o subgrupo parabólico de $GL(r, \mathbb{C})$ que deixa invariante a bandeira standard de tipo $\overrightarrow{m}_{p_i}$ em $\mathbb{C}^r$ e, por (2.3), em E_{p_i}. Denotamos este subgrupo parabólico por B_i. Assim, considerando o espaço quociente $Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})/B_i$, onde $g \sim h$ se e só se existe algum $f \in B_i$ tal que $h = g \circ f$, para $g, h \in Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})$, temos um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})/B_i & \to & \mathbb{F}(E_{p_i}, \overrightarrow{m}_{p_i}) \\ g & \mapsto & \xi(\varepsilon_g). \end{array}$$

Concluimos então que $Iso(\mathbb{C}^r, E_{p_i})/B_i$ é a variedade das bandeiras de tipo $\overrightarrow{m}_{p_i}$ em E_{p_i}, pelo que as estruturas quase-parabólicas de E com o sistema de dados parabólicos $(\overrightarrow{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$ são parametrizadas pelo produto de variedades bandeira:

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{n} \left(Iso\left(\mathbb{C}^r, E_{p_i}\right)/B_i\right).$$

■

Nota 2.7. O grupo dos automorfismos algébricos de E, $Aut(E)$, age em $\mathcal{R}$. O espaço quociente é o conjunto das classes de isomorfismo de todos os fibrados quase-parabólicos com o sistema de dados parabólicos $(\overrightarrow{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$ cujo fibrado subjacente é E (comparar com a definição 2.5).

Corolário 2.8. *Sejam $p_1, \ldots, p_n$ pontos marcados de $\mathcal{C}$ e seja E um fibrado vectorial algébrico de característica 2 sobre $\mathcal{C}$ tal que as bandeiras em $p_1, \ldots, p_N$ são do tipo $(1,1)$ e as bandeiras em $p_{N+1}, \ldots, p_n$ são do tipo (2). As estruturas quase-parabólicas em E são parametrizadas por*

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{N} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right)/B\right) \cong (\mathbb{P}^1)^N,$$

onde $Iso(\mathbb{C}^2, E_{p_i})$ é o conjunto dos isomorfismos de $\mathbb{C}^2$ para E_{p_i} e

$$B = \left\{ M \in GL(2,\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ com } a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

é o subgrupo parabólico de $GL(2,\mathbb{C})$ que deixa invariante a bandeira standard de tipo $(1,1)$ em $\mathbb{C}^2$.

Demonstração. Como a característica de E é 2, cada fibra de E é isomorfa a $\mathbb{C}^2$ e portanto podemos ter dois tipos de bandeiras, correspondentes às duas possíveis filtrações descendentes de $\mathbb{C}^2$:

- $\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{C} \supset 0$, de tipo $(1,1)$

- $\mathbb{C}^2 \supset 0$, de tipo (2).

A cada tipo de bandeira corresponde o subgrupo parabólico de $GL(2,\mathbb{C})$, B, que deixa invariante a bandeira standard do mesmo tipo em $\mathbb{C}^2$:

- $B = \left\{ M \in GL(2,\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{com } a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$,

- $B = GL(2,\mathbb{C})$,

respectivamente. Por hipótese, temos N bandeiras do primeiro tipo em E e estamos a considerar os pontos $p_1 \ldots, p_n$ ordenados de modo que as bandeiras em $p_1, \ldots, p_N$ sejam do primeiro tipo e as bandeiras em $p_{N+1}, \ldots, p_n$ sejam do segundo tipo. Vimos na proposição 2.6 que as estruturas quase-parabólicas de E são parametrizadas por um produto de variedades bandeira

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{N} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right) / B \right) \times \prod_{j=N+1}^{n} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_j}\right) / GL(2,\mathbb{C}) \right)$$

onde

$$\prod_{i=1}^{N} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right) / B \right)$$

parametriza as bandeiras do tipo $\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{C} \supset 0$ e

$$\prod_{j=N+1}^{n} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_j}\right) / GL(2,\mathbb{C}) \right)$$

parametriza as bandeiras do tipo $\mathbb{C}^2 \supset 0$ e, portanto, é trivial. Assim,

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{N} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right) / B \right)$$

onde

$$B = \left\{ M \in GL(2,\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{com } a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

é o subgrupo parabólico de $GL(2,\mathbb{C})$ que deixa invariante a bandeira standard de tipo $(1,1)$ em $\mathbb{C}^2$.

Tendo em conta a demonstração da proposição 2.6, vemos que qualquer bandeira de tipo $(1,1)$ em E_{p_i} é da forma

$$E_{p_i} = \xi(\varepsilon)_1 \supset \xi(\varepsilon)_2 \supset \{0\},$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \xi(\varepsilon)_1 & = & \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_2 \\ \xi(\varepsilon)_2 & = & \mathbb{C}\varepsilon_1 \end{array}$$

para alguma base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E_{p_i}. Seja (e_1, e_2) a base canónica do espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^2$. Fixemos uma base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E_{p_i} e seja $g : E_{p_i} \to \mathbb{C}^2$ o isomorfismo definido por $g(\varepsilon_1) = e_1$ e $g(\varepsilon_2) = e_2$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{C}^2, E_{p_i}) & \to & \mathbb{C}^2\backslash\{0\} \\ f & \mapsto & g\left(f(e_1)\right) \end{array}.$$

Esta aplicação não é injectiva mas, pelo que vimos anteriormente, induz o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{C}^2, E_{p_i})/B & \stackrel{\cong}{\to} & \left(\mathbb{C}^2\backslash\{0\}\right)/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{P}^1 \\ [f] & \mapsto & [g\left(f(e_1)\right)] \end{array}.$$

Concluimos então que

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{N} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right)/B\right) \cong (\mathbb{P}^1)^N.$$

■

Definição 2.9. Consideremos a curva $\mathcal{C}$ com um número finito de pontos marcados $p_1, \ldots, p_n$. Seja T uma variedade algébrica irredutível não singular. Uma *família algébrica* de fibrados quase-parabólicos de característica r e dados quase-parabólicos $(\vec{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$ sobre $\mathcal{C}$ parametrizados por T é dada por:

- um fibrado vectorial algébrico $\tilde{E} \to \mathcal{C} \times T$ de característica r sobre $\mathcal{C} \times T$, tal que considerando as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & T & \to & \mathcal{C} \times T \\ & t & \mapsto & (p_i, t) \end{array}$$

com $i = 1, \ldots, n$, temos que $\tilde{E}|_{\{p_i\} \times T} \cong \varphi_i^* \tilde{E} \to T$ é um fibrado vectorial de característica r sobre T.

- para cada $i = 1, \ldots, n$, uma filtração

$$\varphi_i^* \tilde{E} = \tilde{E}_{i,1} \supset \ldots \supset \tilde{E}_{i,r_{p_i}} \supset \{0\}$$

onde $\tilde{E}_{i,k} \to T$,para $2 \leq k \leq r_{p_i}$, é um subfibrado vectorial algébrico de $\varphi_i^* \tilde{E}$ de característica $r - \sum_{j=1}^{k-1} m_{p_i,j}$.

Quando não houver perigo de confusão (da família com o fibrado) designaremos a família algébrica por $\tilde{E} \to \mathcal{C} \times T$.

Nota 2.10. Seja $t \in T$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi_t : & \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \times T \\ & x & \mapsto & (x, t) \end{array}$$

Temos que $\tilde{E}|_{\mathcal{C} \times \{t\}} \cong \psi_t^* \tilde{E} \to \mathcal{C}$ é um fibrado quase-parabólico de característica r e sistema de bandeiras $(\vec{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,n}$ sobre $\mathcal{C}$, que designaremos por $\tilde{E}_t$. A bandeira em p_i é dada por:

$$\left(\psi_t^* \tilde{E}\right)_{p_i} = \left(\varphi_i^* \tilde{E}\right)_t = \left(\tilde{E}_{i,1}\right)_t \supset \left(\tilde{E}_{i,2}\right)_t \supset \ldots \supset \left(\tilde{E}_{i,r_{p_i}}\right)_t \supset \{0\}.$$

Nesta dissertação não nos vamos referir aos fibrados parabólicos. No entanto, parece-nos relevante terminar este capítulo com a definição de fibrados parabólicos pois esta noção é necessária para a construção do espaço moduli em geral. ([MS 80])

Definição 2.11. Seja $\{p_i\}_{i=1}^n$ um conjunto finito não vazio de pontos distintos de $\mathcal{C}$. Um *fibrado parabólico* E' de característica r sobre $\mathcal{C}$ com pontos marcados p_i é um fibrado vectorial algébrico sobre $\mathcal{C}$ equipado com uma *estrutura parabólica*, ou seja, é um fibrado quase-parabólico E sobre $\mathcal{C}$ com bandeiras pesadas, isto é, para cada ponto p_i associamos à bandeira descendente

$$E_{p_i} = E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \ldots \supset E_{p_i,r_{p_i}} \supset E_{p_i,r_{p_i}+1} = \{0\}.$$

uma sucessão de números reais:

$$0 \leq a_{p_i,1} < a_{p_i,2} < \ldots < a_{p_i,r_{p_i}} < 1.$$

Chamamos a cada $a_{p_i,k}$ o *peso* associado ao subespaço vectorial $E_{p_i,k}$.

Designamos o sistema $(a_{p_i,k})_{1\leq i\leq n, 1\leq k\leq r_{p_i}}$ por *sistema de pesos* para E'.

Dizemos que $m_{p_i,k}$ é a *multiplicidade do peso* $a_{p_i,k}$.

Definição 2.12. Sejam E e F dois fibrados parabólicos sobre $\mathcal{C}$ com pontos marcados $p_1, \ldots, p_n$. Um *morfismo parabólico* entre E e F é uma aplicação de fibrados vectoriais algébricos $\psi : E \to F$, que respeita as estruturas parabólicas, isto é, para todo o ponto marcado p_i com a estrutura parabólica sobre E dada por

$$\begin{array}{rcl} E_{p_i} & = & E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \ldots \supset E_{p_i,r_{p_i(E)}} \supset \{0\} \\ 0 & \leq & a_{p_i,1}(E) < a_{p_i,2}(E) < \ldots < a_{p_i,r_{p_i(E)}}(E) < 1 \end{array}$$

e a estrutura parabólica sobre F dada por

$$\begin{array}{rcl} F_{p_i} & = & F_{p_i,1} \supset F_{p_i,2} \supset \ldots \supset F_{p_i,r_{p_i(F)}} \supset \{0\} \\ 0 & \leq & a_{p_i,1}(F) < a_{p_i,2}(F) < \ldots < a_{p_i,r_{p_i(F)}}(F) < 1 \end{array}$$

temos que

$$a_{p_i,j}(E) > a_{p_i,k}(F) \Rightarrow \psi_{p_i}(E_{p_i,j}) \subseteq F_{p_i,k+1}.$$

Dizemos que ψ é um *isomorfismo parabólico* se é um isomorfismo de fibrados vectoriais algébricos e se ψ^{-1} é um morfismo parabólico.

Tendo em conta a definição 2.5, vemos que se dois fibrados parabólicos são isomorfos como fibrados parabólicos então têm o mesmo sistema de pesos e são isomorfos como fibrados quase-parabólicos. Vemos também que se dois fibrados parabólicos são isomorfos como fibrados quase-parabólicos e têm o mesmo sistema de pesos então são isomorfos como fibrados parabólicos.

Nota 2.13. Dado um fibrado parabólico E sobre $\mathcal{C}$ com pontos marcados $p_1, \ldots, p_n$, denotemos por $ParAut(E)$ o *grupo dos automorfismos parabólicos* de E. Consideremos um desses automorfismos, $\psi : E \to E$. Como ψ é um morfismo parabólico, devemos ter $\psi_{p_i}(E_{p_i,j}) = E_{p_i,j}$. Assim, concluímos que $ParAut(E)$ é independente dos pesos, isto é, depende apenas da estrutura quase-parabólica de E.

Definição 2.14. Um fibrado parabólico E é um *fibrado parabólico simples* se $ParAut(E) = \mathbb{C}^*$.

Tendo em conta a nota 2.13, vemos que a definição anterior é independente dos pesos, pelo que faz sentido a noção de *fibrado quase-parabólico simples.*

Capítulo 3

Fibrados Vectoriais sobre $\mathbb{P}^1$

Neste capítulo pretendemos classificar os fibrados vectorias sobre a recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Esta classificação é feita num teorema conhecido por Teorema de Birkhoff-Grothendieck ou Teorema de Grothendieck, que demonstramos de seguida. A nossa demonstração do teorema segue a referência [HSW 99, Capítulo 2.4].

Teorema 3.1. *Se E é um fibrado vectorial algébrico de característica m sobre $\mathbb{P}^1$, então*

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_m)$$

para alguns $a_i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Iremos provar este teorema por indução na característica de E.

Comecemos por considerar $rk(E) = 1$, ou seja, E é um fibrado linha sobre $\mathbb{P}^1$. Tendo em conta a Propriedade 1 da página 17, sabemos que $Pic(\mathbb{P}^1) \cong Div(\mathbb{P}^1)/PDiv(\mathbb{P}^1)$. Além disso, em $\mathbb{P}^1$, um divisor D é principal se e só se $deg(D) = 0$. Assim temos um isomorfismo de grupos $Div(\mathbb{P}^1)/PDiv(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{Z}$, pelo que concluimos que $Pic(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$ e então o grau classifica os fibrados linha em $\mathbb{P}^1$, a menos de isomorfismo algébrico. Logo, tendo em conta o exemplo 1.33, E é isomorfo a $\mathcal{O}(n)$ para $n = deg(E)$.

Suponhamos agora que E é um fibrado vectorial de característica m. Consideremos $E(n) = E \otimes \mathcal{O}(n)$. Usando Teorema de Riemann-Roch, vemos que para n suficientemente grande $E(n)$ terá secções regulares globais. Consideremos a sequência exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(E(n-1)) \xrightarrow{s_p \cdot -} \mathcal{O}(E(n)) \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{S}$ é o feixe quociente, $p \in \mathbb{P}^1$ e localmente em torno de p temos $s_p(z) = z$. Se considerarmos a sequência exacta longa associada podemos deduzir que a aplicação induzida

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(n-1)) \xrightarrow{s_p \cdot -} H^0(\mathbb{P}^1, E(n))$$

é injectiva. Notemos que esta aplicação ou é apenas injectiva ou é um isomorfismo. Suponhamos que estes grupos têm a mesma dimensão. Então a aplicação acima deve ser um isomorfismo, o que implica que todas as secções globais de $E(n)$ devem anular-se em p. Uma vez que isto é verdade para todos os pontos $p \in \mathbb{P}^1$, temos uma contradição (só teríamos a secção nula). Assim, $h^0(E(n-1)) < h^0(E(n))$, e então existe um inteiro n tal que

$$H^0(\mathbb{P}^1, E(n-1)) = 0 \quad e \quad H^0(\mathbb{P}^1, E(n)) \neq 0.$$

Considerando este inteiro n, a sequência exacta longa aparece agora como

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, E(n)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{S}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, E(n-1)) \longrightarrow \dots$$

Se s é uma secção global não trivial de $E(n)$, então, tendo em conta a sequência exacta (3.1), a aplicação para $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{S})$ é dada por avaliando s no ponto p (o feixe $\mathcal{S}$ é um feixe arranha céus). Pela exactidão, esta aplicação é injectiva e assim $s(p) \neq 0$ para todo o ponto $p \in \mathbb{P}^1$, pelo que s é uma secção não nula. Assim, podemos definir uma inclusão do fibrado linha trivial $\mathcal{O}$ em $E(n)$ por:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} & \to & E(n) \\ (m, \lambda) & \mapsto & \lambda s(m). \end{array}$$

Então temos uma sequência exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(n) \xrightarrow{\alpha} Q \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

onde Q é o fibrado quociente e $\alpha \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(E(n), Q))$. Para que $E(n)$ seja decomponível, a partir de $\mathcal{O}$, numa soma directa, requeremos uma cópia de Q dentro de $E(n)$ que é complementar a $\mathcal{O}$. Isto é a cindição da sequência exacta (3.2), ou seja, a existência de um homomorfismo $Q \to E(n)$ que dá a identidade em Q quando composto com α. Para mostrarmos que este homomorfismo existe, consideremos a sequência exacta curta obtida da (3.2) fazendo o produto tensorial com Q^*

$$0 \longrightarrow Q^* = \mathcal{H}om(Q, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{H}om(Q, E(n)) \longrightarrow \mathcal{H}om(Q, Q) \longrightarrow 0,$$

e a correspondente sequência exacta longa

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, Q^*) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(Q, E(n))) \xrightarrow{\alpha\circ -} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(Q, Q)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, Q^*) \longrightarrow \ldots$$

Existe claramente uma secção global não nula de $\mathcal{H}om(Q, Q)$ dada pela aplicação identidade de Q para Q, id_Q. Gostaríamos de mostrar que id_Q é enviada para zero em $H^1(\mathbb{P}^1, Q^*)$, uma vez que isto significaria que ela se levantaria a uma secção global de $\mathcal{H}om(Q, E(n))$, que é o que queremos. Pela nossa hipótese de indução, como $rk(Q) = m - 1$, Q cinde-se numa soma directa de fibrados linha

$$Q = \mathcal{O}(b_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(b_{m-1}).$$

Consideremos a sequência exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}(E(n-1)) \longrightarrow \mathcal{O}(Q(-1)) \longrightarrow 0,$$

que se obtém da sequência exacta (3.2) fazendo o produto tensorial com $\mathcal{O}(-1)$, e a correspondente sequência exacta longa

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, E(n-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, Q(-1)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1)) \longrightarrow \ldots$$

Como $\mathcal{O}(-1)$ tem grau negativo, o primeiro destes grupos é nulo. O segundo grupo é nulo devido à maneira como escolhemos n. Aplicando o Teorema de Riemann-Roch a $\mathcal{O}(-1)$, vemos que

$$h^1(\mathcal{O}(-1)) = h^0(\mathcal{O}(-1)) - deg(\mathcal{O}(-1)) - 1 = 0,$$

e assim concluimos que o quarto grupo é também nulo. Logo

$$H^0(\mathbb{P}^1, Q(-1)) = \bigoplus_{i=1}^{m-1} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(b_i - 1)) = 0,$$

e segue que $b_i - 1$ deve ser negativo para todo o i, uma vez que para $n \geq 0$, $\mathcal{O}(n)$ tem um espaço de secções de dimensão $n+1$ (conferir exemplo 1.8). Assim $b_i \leq 0$. Aplicando agora o Teorema de Riemann-Roch a $\mathcal{O}(-b_i)$, vemos que

$$h^1(\mathcal{O}(-b_i)) = h^0(\mathcal{O}(-b_i)) - deg(\mathcal{O}(-b_i)) - 1 = 0$$

pois as secções de $\mathcal{O}(-b_i)$ são polinómio homogéneos de grau $-b_i$. Daqui vem que

$$H^1(\mathbb{P}^1, Q^*) = \bigoplus_{i=1}^{m-1} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-b_i)) = 0.$$

Assim, id_Q levanta-se a $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(Q, E(n)))$, ou seja, existe uma secção global de $\mathcal{H}om(Q, E(n))$ que quando composta com α dá id_Q, o que significa que $E(n)$ cinde-se como $\mathcal{O} \oplus Q$, ou seja,

$$E(n) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(b_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(b_{m-1}).$$

Então, fazendo o produto tensorial com $\mathcal{O}(-n)$, temos

$$E \cong \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(b_1 - n) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(b_{m-1} - n),$$

o que conclui a demonstração. ■

Nota 3.2. Seja E um fibrado vectorial algébrico de característica m sobre $\mathbb{P}^1$. Então, pelo teorema anterior,

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_m)$$

para alguns $a_i \in \mathbb{Z}$. Sem perda de generalidade, assumamos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$. Temos que $(a_1, \ldots, a_m)$ é unicamente determinado por E. Chamemos a $(a_1, \ldots, a_m)$ o *tipo de E*.

O principal objectivo deste trabalho é descrever o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados vectoriais algébricos quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com n ($n > 0$) pontos marcados, o que será feito no próximo capítulo. Nesse sentido, o lema seguinte descreve o grupo de automorfismos de um fibrado vectorial algébrico de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$, que pelo Teorema 3.1 é da forma $\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$, para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.3. *Consideremos* $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ *um fibrado vectorial algébrico de característica* 2 *sobre* $\mathbb{P}^1$.

1. *Se* $a_1 = a_2$*, então o grupo de automorfismos de* E *é* $Aut(E) = GL(2, \mathbb{C})$.

2. *Se* $a_1 < a_2$*, então o grupo de automorfismos de* E *é*

$$Aut(E) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ s & c_2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}^* \ e \ s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1)) \right\}.$$

Demonstração. Seja $f \in Aut(E) = \Gamma\left(\mathcal{H}om\left(\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2), \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)\right)\right)$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) & \to & \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{array}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + f(0, y) \\ &= (f_1(x, 0), f_2(x, 0)) + (f_1(0, y), f_2(0, y)) \\ &= (f_{11}(x) + f_{12}(y), f_{21}(x) + f_{22}(y)) \end{aligned}$$

com $f_{ij} : \mathcal{O}(a_j) \to \mathcal{O}(a_i)$, $i, j = 1, 2$, definidas por $f_{11}(x) = f_1(x, 0)$, $f_{12}(y) = f_1(0, y)$, $f_{21}(x) = f_2(x, 0)$ e $f_{22}(y) = f_2(0, y)$. Podemos representar f matricialmente:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(x) + f_{12}(y) \\ f_{21}(x) + f_{22}(y) \end{pmatrix}.$$

1. Neste caso, como $Aut(E) = \Gamma\left(\mathcal{H}om\left(\mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1), \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1)\right)\right)$, vem que para $i, j = 1, 2$, $f_{ij} \in \Gamma\left(\mathcal{H}om\left(\mathcal{O}(a_1), \mathcal{O}(a_1)\right)\right) \cong \Gamma\left(\mathcal{O}(a_1)^* \otimes \mathcal{O}(a_1)\right) \cong \Gamma\left(\mathcal{O}(0)\right) \cong \mathbb{C}^*$, pelo que dada $f \in Aut(E)$, f pode ser representada matricialmente por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$, ou seja $Aut(E) = GL(2, \mathbb{C})$.

2. Pelo que vimos antes, neste caso temos

$$\begin{aligned}
f_{11} &\in \Gamma\left(\mathcal{H}om(\mathcal{O}(a_1), \mathcal{O}(a_1))\right) \cong \mathbb{C}^* \\
f_{22} &\in \Gamma\left(\mathcal{H}om(\mathcal{O}(a_2), \mathcal{O}(a_2))\right) \cong \mathbb{C}^* \\
f_{12} &\in \Gamma\left(\mathcal{H}om(\mathcal{O}(a_2), \mathcal{O}(a_1))\right) \cong \Gamma\left(\mathcal{O}(a_1 - a_2)\right) \cong 0 \\
f_{21} &\in \Gamma\left(\mathcal{H}om(\mathcal{O}(a_1), \mathcal{O}(a_2))\right) \cong \Gamma\left(\mathcal{O}(a_2 - a_1)\right).
\end{aligned}$$

   Logo
$$Aut(E) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ s & c_2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}^* \text{ e } s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1)) \right\}.$$

■

Capítulo 4

Fibrados Quase-Parabólicos de Característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$

Um espaço moduli é, grosso modo, uma variedade que parametriza alguma classe de objectos geométricos. Problemas de moduli em Geometria Algébrica estão ligados com a classificação de certos objectos (por exemplo curvas algébricas, fibrados vectoriais numa variedade algébrica fixa, conjuntos de pontos de $\mathbb{P}^n$) sob uma relação de equivalência (por exemplo isomorfismo de curvas, isomorfismo de fibrados, equivalência projectiva).

Pretendemos descrever o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados vectoriais algébricos quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com pontos marcados $p_1, \ldots, p_n$. Podemos ver que este conjunto tem uma cobertura por um número finito de cópias de $\mathbb{P}^1$ com mudanças de carta algébricas mas não é Hausdorff, pelo que não é um espaço moduli. O caso de $\mathbb{P}^1$ com quatro pontos marcados será tratado no último capítulo.

A principal referência para este capítulo é [FS 92, secção 8].

Denotemos por $0, 1$ e ∞ os pontos $[0 : 1], [1 : 1]$ e $[1 : 0]$ de $\mathbb{P}^1$, respectivamente.

Consideremos o grupo projectivo $PGL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, onde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é considerado o subgrupo dos múltiplos escalares da matriz identidade.

Começamos por enunciar um teorema conhecido de que vamos precisar mais à frente.

Teorema 4.1. *Se p_1, p_2, p_3 são três pontos distintos de $\mathbb{P}^1$, então existe um único $T \in$*

$PGL(2,\mathbb{C})$ *tal que* $T(p_1) = 0$, $T(p_2) = 1$ *e* $T(p_3) = \infty$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [JS 87].

Sejam agora M o espaço projectivo $\mathbb{P}^1$ com pontos marcados $p_1, \dots, p_n$, e E um fibrado vectorial algébrico de característica 2 sobre M.

Pelo teorema 3.1, como E é um fibrado vectorial algébrico sobre $\mathbb{P}^1$ então tem a decomposição

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$$

para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.

Vejamos como pode ser considerada uma estrutura quase-parabólica em E. Como a característica de E é 2, cada fibra de E é isomorfa a $\mathbb{C}^2$ e portanto podemos ter dois tipos de bandeiras, correspondentes às duas possíveis filtrações descendentes de $\mathbb{C}^2$:

- $\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{C} \supset 0$, de tipo $(1,1)$
- $\mathbb{C}^2 \supset 0$, de tipo (2).

Seja N o número de bandeiras do primeiro tipo em E. Consideremos os pontos $p_1 \dots, p_n$ ordenados de modo que as bandeiras em $p_1, \dots, p_N$ sejam do primeiro tipo e as bandeiras em $p_{N+1}, \dots, p_n$ sejam do segundo tipo.

Vimos no corolário 2.8 que, neste caso, as estruturas quase-parabólicas em E são parametrizadas por $(\mathbb{P}^1)^N$.

Queremos estudar o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados quase-parabólicos simples (conferir definição 2.14) que têm E como fibrado subjacente.

Comecemos por identificar o conjunto dos fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente.

Lema 4.2. *Consideremos* $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$, *como antes.*

1. *Se $a_1 = a_2$, então os fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente formam o conjunto*

$$S(a_1, a_1) := \left\{(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N : |\{X_1, \ldots, X_N\}| \geq 3\right\}.$$

2. *Se $a_1 < a_2$, então os fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente formam o conjunto*

$$S(a_1, a_2) := \left\{(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N : |\{i : X_i \neq 0\}| \geq a_2 - a_1 + 2 \text{ e } X_i \neq 0, \infty \text{ para algum } i\ \right\}.$$

Demonstração. Vimos no lema 2.8 que as estruturas quase-parabólicas em E são parametrizadas por $(\mathbb{P}^1)^N$.

1. Vimos no lema 3.3 que, neste caso, o grupo de automorfismos de E é $GL(2, \mathbb{C})$. Um elemento de $(\mathbb{P}^1)^N$ representa um fibrado quase-parabólico simples se e só se o estabilizador desse elemento é $\mathbb{C}^* \subset GL(2, \mathbb{C})$, considerando a acção de $Aut(E) = GL(2, \mathbb{C})$ em $(\mathbb{P}^1)^N$, ou seja, o estabilizador é a Id, considerando a acção de $PGL(2, \mathbb{C})$ em $(\mathbb{P}^1)^N$.

   Seja $P = (X_1, X_2, \ldots, X_N) \in S(a_1, a_1)$. Suponhamos, por conveniência de notação, que $X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1$ (nos outros casos o raciocínio é análogo). Seja $g \in PGL_2(\mathbb{C})$. Temos que $g \cdot (X_1, \ldots, X_N) = (g \cdot X_1, \ldots, g \cdot X_N)$. Pelo teorema 4.1, sabemos que existe um único $h \in PGL_2(\mathbb{C})$ tal que $h \cdot X_1 = 0$, $h \cdot X_2 = 1$, $h \cdot X_3 = \infty$. Se $g \in Stab(P)$ então, pela unicidade de h, vem que $h \cdot g = h$, o que implica que $g = Id$. Logo $Stab(P) = \{Id\}$, pelo que P é um fibrado quase-parabólico simples. Inversamente, suponhamos agora que $P \in (\mathbb{P}^1)^N$ não tem pelo menos três coordenadas distintas, seja, por exemplo, $P = (X_1, X_2, X_1, \ldots, X_1)$ com $X_1 \neq X_2$. Considerando o teorema 4.1 temos que para cada $X \in \mathbb{P}^1$ existe um único $f \in PGL_2(\mathbb{C})$ tal que $f(X_1) = X_1$, $f(X_2) = X_2$ e $f(X) = \infty$, pelo que $f \in Stab(P)$. Além disso, se $X \neq \infty$, então $f \neq Id$. Logo $Stab(P) \neq \{Id\}$ pelo que P não é um fibrado quase-parabólico simples. De modo análogo vemos que se $P = (X_1, \ldots, X_1)$, então P não é um fibrado quase-parabólico simples.

2. Como vimos no lema 3.3, neste caso o grupo de automorfismos de E é

$$Aut(E) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ s & c_2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}^* \text{ e } s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1)) \right\}.$$

Um elemento de $(\mathbb{P}^1)^N$ representa um fibrado quase-parabólico simples se e só se o estabilizador desse elemento é $\mathbb{C}^* \subset Aut(E)$, considerando a acção de $Aut(E)$ em $(\mathbb{P}^1)^N$.

Fixemos um isomorfismo $f : \mathbb{P}(E_{p_i}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$, tal que a linha $\mathcal{O}(a_1)_{p_i}$ é enviada para $\infty = [1:0] \in \mathbb{P}^1$ e a linha $\mathcal{O}(a_2)_{p_i}$ é enviada para $0 = [0:1] \in \mathbb{P}^1$. Assim, para $1 \leq i \leq N$, como as bandeiras em E_{p_i} são da forma

$$E_{p_i} = E_{p_i,1} \supset E_{p_i,2} \supset \{0\}$$

onde $E_{p_i} \cong \mathbb{C}^2$ e $E_{p_i,2} \cong \mathbb{C}$, então são definidas por pontos $X_{p_i} = [a:b] \in \mathbb{P}^1$, com $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$, onde $E_{p_i,2}$ corresponde a X_{p_i} via a função f.

Consideremos as funções injectivas da forma

$$\sigma : \{1, \ldots, a_2 - a_1 + 2\} \to \{1, \ldots, N\}$$

com $\sigma(1) < \ldots < \sigma(a_2 - a_1 + 2)$, e os subconjuntos de $S(a_1, a_2)$ dados por

$$U_\sigma = \{(X_1, \ldots, X_N) : X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(a_2-a_1+1)} \neq 0 \text{ e } X_{\sigma(a_2-a_1+2)} \neq 0, \infty\}.$$

Temos assim que

$$S(a_1, a_2) = \bigcup_\sigma U_\sigma.$$

Seja $P \in S(a_1, a_2)$. Consideremos que $P = (X_1, \ldots, X_{a_2-a_1+1}, X_{a_2-a_1+2}, \ldots, X_N)$ com $X_1, \ldots, X_{a_2-a_1+1} \neq 0$ e $X_{a_2-a_1+2} \neq 0, \infty$ (nos outros casos o raciocínio é análogo). Sejam, para $1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1$, as bandeiras em p_i dadas por $X_i = [1 : b_i]$ com $b_i \in \mathbb{C}$ e a bandeira em $p_{a_2-a_1+2}$ dada por $X_{a_2-a_1+2} = [1 : b_{a_2-a_1+2}]$ com $b_{a_2-a_1+2} \in \mathbb{C}^*$. Existe $g \in Aut(E)$ tal que $gX_i = \infty$ para $1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1$ e $gX_{a_2-a_1+2} = 1$. Note-se que o fibrado linha $\mathcal{O}(a_2 - a_1)$ tem grau $(a_2 - a_1)$ pelo que uma sua secção fica definida se for conhecido o seu valor em $(a_2 - a_1 + 1)$ pontos. Assim, em particular, existe um único $g \in Aut(E)$ da forma

$$g = \begin{pmatrix} c & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

tal que $gX_i = \infty$ para $1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1$ e $gX_{a_2-a_1+2} = 1$, pois a secção s fica definida por $s(p_i) = -b_i$ para $1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1$ e $c = s(p_{a_2-a_1+2}) + b_{a_2-a_1+2}$. Temos que $Stab(P) = g^{-1}Stab(gP)g$ pelo que $Stab(P) = \mathbb{C}^*$ se e só se $Stab(gP) = \mathbb{C}^*$. Vejamos então que o estabilizador de $gP = (\infty, \ldots, \infty, 1, gX_{a_2-a_1+3}, \ldots, gX_N)$ é $\mathbb{C}^*$. Seja

$$f = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ h & c_2 \end{pmatrix} \in Aut(E).$$

Como temos $(a_2 - a_1 + 1)$ pontos em que a bandeira é definida por $\infty = [1 : 0]$, para que $f \in Stab(gP)$, a secção $h \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1)$ tem que ser a secção nula. Logo temos que $Stab(gP) \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Além disso, para que f preserve a bandeira em $p_{a_2-a_1+2}$, que é definida por $1 = [1 : 1]$, temos que ter $c_1 = c_2$. Concluimos então que $Stab(gP) = \mathbb{C}^*$. Logo $Stab(P) = \mathbb{C}^*$, pelo que P é um fibrado quase-parabólico simples. Assim, temos que $S(a_1, a_2)$ é um subconjunto dos fibrados quase-parabólicos simples. Queremos ver que $S(a_1, a_2)$ é, de facto, o conjunto de todos os fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente.

Comecemos por ver que um fibrado quase-parabólico dado por $(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N$ tal que $|\{i : X_i \neq 0\}| \leq a_2 - a_1 + 1$, não é um fibrado quase-parabólico simples. Notemos que $Aut(E)$ preserva $\mathcal{O}(a_2) \subset E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$, pelo que nos pontos $p_i \in M$ onde $X_i = 0$, ou seja, $E_{p_i,2} = \mathcal{O}(a_2)_{p_i}$, a bandeira é preservada por qualquer automorfismo de E. Consideremos agora um ponto $p_i \in M$ tal que $X_i \neq 0$, ou seja, a bandeira em E_{p_i} é definida por $X_{p_i} = [1 : b_i] \in \mathbb{P}^1$, com $b_i \in \mathbb{C}$. Seja

$$g = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ s & c_2 \end{pmatrix} \in Aut(E),$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ tal que $c_1 \neq c_2$. Para que g preserve a bandeira em E_{p_i} temos que ter $g_{p_i}(E_{p_i,2}) = E_{p_i,2}$, isto é, tem que existir $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$g_{p_i}\begin{pmatrix} 1 \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ s(p_i) & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ b_i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ b_i \end{pmatrix},$$

ou seja, $\lambda = c_1$ e $s(p_i) = (c_1 - c_2)b_i$. Note-se que se forem dados valores em $(a_2 - a_1 + 1)$ ou menos pontos de M, existe pelo menos uma secção $s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1))$ que toma esses valores. Em particular, se forem conhecidos valores em exactamente $(a_2 - a_1 + 1)$ pontos, então existe uma única secção $s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_2 - a_1))$ que toma esses valores. Como estamos a considerar que $|\{i : X_i \neq 0\}| \leq a_2 - a_1 + 1$, então existe uma secção $s \in \Gamma(\mathcal{O}(a_1 - a_2))$ tal que g preserva as bandeiras em E_{p_i} para todo i. Ainda que s fique definida como a secção nula, como estamos a supor que $c_1 \neq c_2$, temos que $g \neq k \cdot Id$, $k \in \mathbb{C}^*$, e g preserva as bandeiras em E_{p_i} para todo i, pelo que o estabilizador de $(X_1, \ldots, X_N)$ não é $\mathbb{C}^*$ e assim $(X_1, \ldots, X_N)$ não representa um fibrado quase-parabólico simples.

Por outro lado, um fibrado quase-parabólico dado por $(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N$ onde para todo o i temos $X_i = 0$ ou $X_i = \infty$, não é um fibrado quase-parabólico simples pois o estabilizador de um fibrado definido desta forma contém $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Logo os fibrados quase-parabólicos simples formam o conjunto

$$S(a_1, a_2) = \left\{(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N : |\{i : X_i \neq 0\}| \geq a_2 - a_1 + 2 \text{ e } X_i \neq 0, \infty \text{ para algum i}\right\}.$$

∎

Considerando o lema anterior, vemos que quando $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1)$, se $N < 3$, ou seja, se M tem menos de três pontos marcados com bandeiras do tipo $\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{C} \supset 0$, então $S = \emptyset$, isto é, não existem fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente. De forma análoga vemos que quando $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ com $a_1 < a_2$, se $N < a_2 - a_1 + 2$ então não existem fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente.

Nota 4.3. Seja $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ como anteriormente.

1. Suponhamos que $a_1 = a_2$. Consideremos as funções injectivas da forma

$$\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, \dots, N\}$$

com $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$, e os conjuntos dados por

$$U_\sigma = \{(X_1, \dots, X_N) : X_{\sigma(1)} \neq X_{\sigma(2)} \neq X_{\sigma(3)} \neq X_{\sigma(1)}\}.$$

Tendo em conta a proposição anterior temos que

$$S(a_1, a_1) = \bigcup_\sigma U_\sigma,$$

ou seja, $\bigcup_\sigma U_\sigma$ forma uma cobertura do conjunto dos fibrados quase-parabólicos simples que têm $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1)$ como fibrado subjacente.

2. Suponhamos que $a_1 < a_2$. Consideremos as funções injectivas definidas na demonstração da proposição anterior

$$\sigma : \{1, \dots, a_2 - a_1 + 2\} \to \{1, \dots, N\}$$

com $\sigma(1) < \dots < \sigma(a_2 - a_1 + 2)$, e os conjuntos dados por

$$U_\sigma = \{(X_1, \dots, X_N) : X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(a_2 - a_1 + 1)} \neq 0 \;\; e \;\; X_{\sigma(a_2 - a_1 + 2)} \neq 0, \infty\}.$$

Tendo em conta a proposição anterior temos que

$$S(a_1, a_2) = \bigcup_\sigma U_\sigma,$$

ou seja, $\bigcup_\sigma U_\sigma$ forma uma cobertura do conjunto dos fibrados quase-parabólicos simples que têm $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ como fibrado subjacente.

O grupo dos automorfismos de E, $Aut(E)$, age em $S(a_1, a_2)$. Como já foi referido na nota 2.7, temos que o espaço quociente é o conjunto das classes de isomorfismo de todos os fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente. Denotemos este espaço quociente por

$$\mathcal{S}(a_1, a_2) := S(a_1, a_2)/Aut(E).$$

Proposição 4.4. *Seja $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$, como anteriormente.*

1. *Se $a_1 = a_2$, então o conjunto $\mathcal{S}(a_1, a_1)$ tem uma cobertura por um número finito de cópias de $(\mathbb{P}^1)^{N-3}$.*

2. *Se $a_1 < a_2$, então o conjunto $\mathcal{S}(a_1, a_2)$ é, de modo semelhante, coberto por um número finito de cópias de $(\mathbb{P}^1)^{N-(a_2-a_1+2)}$.*

Demonstração.

1. Vimos no lema 4.2 que neste caso os fibrados quase-parabólicos simples formam o conjunto

$$S(a_1, a_1) = \left\{(X_1, \ldots, X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N : |\{X_1, \ldots, X_N\}| \geq 3\right\}.$$

Vimos também no lema 3.3 que quando $E = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1)$ então $Aut(E) = GL(2, \mathbb{C})$. Assim, o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados quase-parabólicos simples é dado por

$$S(a_1, a_1)/GL(2, \mathbb{C}).$$

Na nota 4.3 foi dada uma cobertura do conjunto dos fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente, seja essa cobertura $\{U_\sigma\}_\sigma$. Consideremos um elemento dessa cobertura, o raciocínio é análogo nos restantes casos. Por conveniência de notação, consideremos o conjunto

$$\{(X_1, \ldots, X_N) : X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1\}.$$

Temos que o quociente de

$$\{(X_1, \ldots, X_N) : X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1\}$$

por $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* = PGL(2, \mathbb{C})$ é identificado com

$$\{(0, 1, \infty, X_4, \ldots, X_N)\} \cong (\mathbb{P}^1)^{N-3}.$$

Tendo em conta a cobertura dada na nota 4.3 concluimos que conjuntos quociente semelhantes a este cobrem o espaço todo.

2. Vimos no lema 4.2 que neste caso os fibrados quase-parabólicos simples formam o conjunto

$$S(a_1,a_2) = \left\{(X_1,\dots,X_N) \in (\mathbb{P}^1)^N : |\{i : X_i \neq 0\}| \geq a_2 - a_1 + 2 \text{ e } \quad X_i \neq 0,\infty \text{ para algum i}\right\}.$$

O conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados quase-parabólicos simples é dado por

$$S(a_1,a_2)/Aut(E).$$

Na nota 4.3 foi dada uma cobertura do conjunto dos fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente, seja essa cobertura $\{U_\sigma\}_\sigma$. Consideremos um elemento dessa cobertura, o raciocínio é análogo nos restantes casos. Consideremos, por conveniência de notação, o conjunto

$$\{(X_1,\dots,X_N) : X_i \neq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1 \text{ e } X_{a_2-a_1+2} \neq 0,\infty\}.$$

Tal como vimos na demonstração do lema 4.2, existe um único $g \in Aut(E)$ da forma

$$g = \begin{pmatrix} c & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

tal que $gX_i = \infty$ para $1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1$ e $gX_{a_2-a_1+2} = 1$. Note-se que apenas elementos de $\mathbb{C}^* \subseteq Aut(E)$ levam um elemento da forma $(\infty,\dots,\infty,1,X_{a_2-a_1+3},\dots,X_N)$ noutro da mesma forma. Assim, temos que o quociente de

$$\{(X_1,\dots,X_N) : X_i \neq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq a_2 - a_1 + 1 \text{ e } X_{a_2-a_1+2} \neq 0,\infty\}$$

por $Aut(E)$ é identificado com

$$\{(\infty,\dots,\infty,1,X_{a_2-a_1+3},\dots,X_N)\} \cong (\mathbb{P}^1)^{N-(a_2-a_1+2)}.$$

Tendo em conta a cobertura dada na nota 4.3 concluimos que conjuntos quociente semelhantes a este cobrem o espaço todo. ■

Nota 4.5. Pode provar-se que as aplicações mudança de carta entre os conjuntos da cobertura vista na proposição anterior para $\mathcal{S}(a_1,a_2)$, para alguns $a_1,a_2 \in \mathbb{Z}$, são aplicações algébricas. Isto será visto no capítulo 5 para o caso dos fibrados quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com quatro pontos marcados. Tendo em conta a proposição anterior, note-se ainda que os conjuntos quociente que formam a cobertura para $\mathcal{S}(a_1, a_1)$, com $a_1 \in \mathbb{Z}$, têm como maior subconjunto comum

$$\{(X_1, \ldots, X_N) : X_1, \ldots, X_N \text{ todos distintos}\} / GL(2, \mathbb{C}).$$

No caso de $\mathcal{S}(a_1, a_2)$, se considerarmos por exemplo os conjuntos quociente da sua cobertura

$$\{(\infty, \ldots, \infty, 1, X_{a_2-a_1+3}, X_{a_2-a_1+4}, \ldots, X_N)\}$$

e

$$\{(\infty, \ldots, \infty, X_{a_2-a_1+2}, 1, X_{a_2-a_1+4}, \ldots, X_N)\},$$

vemos que estes têm como maior subconjunto comum

$$\{(\infty, \ldots, \infty, X_{a_2-a_1+2}, \ldots, X_N) : X_{a_2-a_1+2}, X_{a_2-a_1+3} \neq 0, \infty\} / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*).$$

Consideremos o espaço $\mathcal{S}(a_1, a_2)$ equipado com a topologia quociente. A proposição anterior poderia levar-nos a pensar que podemos definir uma estrutura de variedade em $\mathcal{S}(a_1, a_2)$. No entanto tal não é possível porque $\mathcal{S}(a_1, a_2)$ não é, em geral, Hausdorff. Isto será visto com detalhe no capítulo 5 para o caso dos fibrados quase-parabólicos simples de característica 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com quatro pontos marcados.

Seja T uma variedade algébrica irredutível não singular. Suponhamos que $\tilde{E} \to M \times T$ é uma família algébrica de fibrados quase-parabólicos simples de tipo (a_1, a_2), característica 2 e dados quase-parabólicos $(\overrightarrow{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,N}$ sobre M parametrizados por T (conferir definição 2.9 na página 27). Note-se que estamos a considerar apenas os pontos com bandeiras não triviais, ou seja, para todo $i = 1, \ldots, N$ temos que $\overrightarrow{m}_{p_i} = (1, 1)$. Consideremos a aplicação f, no sentido da teoria de conjuntos, que classifica as classes de isomorfismo dos fibrados parametrizados

$$\begin{array}{rccc} f: & T & \to & \mathcal{S}(a_1, a_2) \\ & t & \mapsto & [\tilde{E}_t] \end{array},$$

onde $\tilde{E}_t$ é o fibrado sobre M definido na nota 2.10. Vamos ver, na proposição seguinte, que esta aplicação é localmente algébrica, mostrando assim que $\mathcal{S}(a_1, a_2)$ tem a propriedade universal de um espaço de moduli grosseiro ([N 78]).

Proposição 4.6. *A aplicação f é localmente algébrica.*

Demonstração. Tendo em conta a definição 2.9, temos que $\tilde{E}$ é um fibrado vectorial algébrico de característica 2 sobre $M \times T$, pelo que $\mathcal{O}(\tilde{E})$ é um feixe localmente livre de característica 2 sobre $M \times T$. Consideremos a projecção $\pi_2 : M \times T \to T$ sobre T. Sejam $(M \times T)_t = \pi_2^{-1}(t) = M \times \{t\}$ e $\mathcal{O}(\tilde{E})_t = \mathcal{O}(\tilde{E})|_{(M\times T)_t} = \mathcal{O}(\tilde{E})|_{M\times\{t\}}$, onde $t \in T$.

1. Suponhamos que $a_1 = a_2$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a_1 = a_2 = 0$ pois existe uma identificação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(0,0) & \to & \mathcal{S}(a_1, a_1) \\ [E] & \mapsto & [E \otimes \mathcal{O}(a_1)] \end{array}.$$

Vejamos que existe $U \subseteq T$ subconjunto aberto tal que $\tilde{E}|_{M\times U} \cong (M \times U) \times \mathbb{C}^2$. Temos que

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}} H^0\left((M \times T)_t, \mathcal{O}(\tilde{E})_t\right) &= h^0\left(M \times \{t\}, \mathcal{O}(\tilde{E})|_{M\times\{t\}}\right) \\ &= 2, \end{aligned}$$

pois $\mathcal{O}(\tilde{E})|_{M\times\{t\}} = \mathcal{O}\left(\tilde{E}|_{M\times\{t\}}\right)$, que corresponde ao fibrado $\tilde{E}_t \cong \mathcal{O}(a_0) \oplus \mathcal{O}(a_0)$. Assim, o feixe sobre T, $R^0(\pi_2)_*\tilde{E}$, definido por $R^0(\pi_2)_*\tilde{E}(U) = H^0(\pi_2^{-1}(U), \tilde{E})$ onde U é um aberto de T, é um feixe localmente livre de característica 2 (conferir [K 93, Prop. 9.5.2]). Logo existe uma cobertura aberta de T, $\underline{U} = \{U_i\}_i$, tal que

$$R^0(\pi_2)_*\tilde{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_T(U_i) \oplus \mathcal{O}_T(U_i).$$

Temos que $\mathcal{O}_T(U_i) \oplus \mathcal{O}_T(U_i)$ representa o fibrado trivial de característica 2 sobre T restrito a U_i, isto é, $\mathcal{O}_T(U_i) \oplus \mathcal{O}_T(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^2$. Assim, podemos obter uma trivialização de $R^0(\pi_2)_*\tilde{E}$ em U_i:

$$\varphi_i : \quad R^0(\pi_2)_*\tilde{E}|_{U_i} \quad \to \quad U_i \times \mathbb{C}^2$$

que nos dá uma trivialização algébrica de $\tilde{E}$ em $M \times U_i$:

$$\psi_i : \quad \tilde{E}|_{M\times U_i} \quad \rightarrow \quad (M \times U_i) \times \mathbb{C}^2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} R^0(\pi_2)_*\tilde{E}(U_i) &= H^0\left(\pi^{-1}(U_i), \tilde{E}\right) \\ &= H^0\left(M \times U_i, \tilde{E}\right), \end{aligned}$$

e como φ_i é uma trivialização, podemos definir

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i^{-1} : & U_i \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & R^0(\pi_2)_*\tilde{E}|_{U_i} \\ & (t,(a,b)) & \mapsto & \varphi_i^{-1}(t,(a,b)) : M \times U_i \rightarrow \tilde{E}|_{M\times U_i}. \end{array}$$

Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi_i^{-1} : & (M \times U_i) \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \tilde{E}|_{M\times U_i} \\ & ((x,t),(a,b)) & \mapsto & \varphi_i^{-1}(t,(a,b))(x,t), \end{array}$$

que é um isomorfismo, ou seja, temos uma trivialização algébrica, ψ_i, de $\tilde{E}$ em $M\times U_i$. Logo existe um subconjunto aberto de T, U, tal que $\tilde{E}|_{M\times U} \cong (M \times U) \times \mathbb{C}^2$.

Vimos no lema 2.8 que as estruturas quase-parabólicas em $M\times\mathbb{C}^2$ são parametrizadas por $\mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^1)^N$. Neste caso, o subconjunto aberto de T, U, parametriza fibrados quase-parabólicos simples de tipo (a_1, a_1), característica 2 e dados quase-parabólicos $(\overrightarrow{m}_{p_i})_{i=1,\ldots,N}$ sobre M. Temos então, uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \\ t & \mapsto & (X_1(t), \ldots, X_N(t)), \end{array} \tag{4.1}$$

com $f_1(U) \subseteq \{(X_1, \ldots, X_N) : |(X_1, \ldots, X_N)| \geq 3\}$. Pela segunda parte da definição 2.9, a aplicação (4.1) é algébrica em cada coordenada, pelo que é uma aplicação algébrica. Podemos supor, sem perda de generalidade, que para cada $t \in T$ temos uma ordenação dos pontos $p_i \in M$ de modo que $X_1(t) \neq X_2(t) \neq X_3(t) \neq X_1(t)$. Basta assim mostrar que a aplicação quociente

$$\{(X_1, \ldots, X_N) : X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1\} \rightarrow \{(Y_4, \ldots, Y_N)\} = (\mathbb{P}^1)^{N-3} \tag{4.2}$$

que envia $(X_1, \ldots, X_N)$ em $(gX_4, \ldots, gX_N)$ para $g \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $gX_1 = 0$, $gX_2 = 1$ e $gX_3 = \infty$ é algébrica. Temos que a aplicação (4.2) é a composta de aplicações algébricas:

$$\begin{array}{cccccc} \{(X_1, \ldots, X_N) : X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq X_1\} & \xrightarrow{f_2} & \{(0, 1, \infty, Y_4, \ldots, Y_N)\} & \xrightarrow{f_3} & (\mathbb{P}^1)^{N-3} \\ (X_1, \ldots, X_N) & \mapsto & (0, 1, \infty, gX_4, \ldots, gX_N) & \mapsto & (gX_4, \ldots, gX_N). \end{array}$$

Note-se que f_2 é algébrica porque a aplicação g é algébrica e, pela forma como é construída, g varia algebricamente com X_1, X_2 e X_3. Concluimos então que a aplicação (4.2) é algébrica e assim a aplicação $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ é algébrica em U, ou seja, f é localmente algébrica.

2. No caso $a_1 < a_2$ o raciocínio é análogo. Remetemos o leitor a [FS 92, Prop. 8.2].

■

Capítulo 5

Caso de $\mathbb{P}^1$ com 4 Pontos Marcados

Seja M o espaço projectivo $\mathbb{P}^1$ com pontos marcados p_1, p_2, p_3, p_4. Seja E um fibrado vectorial algébrico de característica 2 sobre M. Pelo teorema 3.1, E tem a decomposição

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$$

para alguns $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Vamos considerar que $a_1 = a_2$. Suponhamos que, dada uma estrutura quase-parabólica em E, a bandeira em cada ponto marcado de M é da forma

$$\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{C} \supset \{0\},$$

já que as bandeiras do outro tipo possível, $\mathbb{C}^2 \supset \{0\}$, são triviais.

Pelo lema 2.8 temos que as estruturas quase-parabólicas em E são parametrizadas por

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{4} \left(Iso\left(\mathbb{C}^2, E_{p_i}\right) / B \right) \cong (\mathbb{P}^1)^4$$

onde B é o subgrupo parabólico de $GL(2, \mathbb{C})$ que deixa invariante a bandeira standard de tipo $(1,1)$ em $\mathbb{C}^2$.

Queremos estudar o espaço moduli dos fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente.

5.1 Conjunto dos Fibrados Quase-Parabólicos Simples

Pelo lema 4.2, vemos que os fibrados quase-parabólicos simples que têm E como fibrado subjacente formam o conjunto

$$S = \left\{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in (\mathbb{P}^1)^4 : |\{X_1, X_2, X_3, X_4\}| \geq 3\right\} \subseteq (\mathbb{P}^1)^4.$$

Vamos considerar $\mathbb{P}^1$ munido da topologia complexa (Hausdorff), $(\mathbb{P}^1)^4$ munido da topologia produto e o subespaço $S \subseteq (\mathbb{P}^1)^4$ munido da topologia induzida. Consideremos os conjuntos:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \{(X, X, Y, Z) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_{13} &= \{(X, Y, X, Z) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_{14} &= \{(X, Y, Z, X) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_{23} &= \{(X, Y, Y, Z) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_{24} &= \{(X, Y, Z, Y) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_{34} &= \{(X, Y, Z, Z) : X, Y, Z \in \mathbb{P}^1 \text{ e } X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
S_0 &= \{(X, Y, Z, W) : X, Y, Z, W \in \mathbb{P}^1, \text{ todos diferentes}\}.
\end{aligned}$$

O conjunto S é dado por:

$$S = S_{12} \cup S_{13} \cup S_{14} \cup S_{23} \cup S_{24} \cup S_{34} \cup S_0.$$

Podemos também considerar uma cobertura aberta de S:

$$S = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \tag{5.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
U_1 &= S \setminus (S_{12} \cup S_{13} \cup S_{23}) = \{(X, Y, Z, W) \in (\mathbb{P}^1)^4 : X \neq Y \neq Z \neq X\} \\
U_2 &= S \setminus (S_{23} \cup S_{24} \cup S_{34}) = \{(X, Y, Z, W) \in (\mathbb{P}^1)^4 : Y \neq Z \neq W \neq Y\} \\
U_3 &= S \setminus (S_{13} \cup S_{14} \cup S_{34}) = \{(X, Y, Z, W) \in (\mathbb{P}^1)^4 : X \neq Z \neq W \neq X\}.
\end{aligned}$$

5.2 Conjunto das Classes de Isomorfismo dos Fibrados Quase-Parabólicos Simples

Pelo lema 3.3 temos que $Aut(E) = GL(2, \mathbb{C})$. Assim, o conjunto das classes de isomorfismo dos fibrados quase-parabólicos simples é dado por

$$\mathcal{S} = S/GL(2, \mathbb{C}),$$

ou seja, $\mathcal{S}$ é o espaço das órbitas da acção de $GL(2, \mathbb{C})$ em S. Consideremos a aplicação sobrejectiva

$$\begin{aligned} \pi : \quad S \quad & \rightarrow \quad \mathcal{S} = S/GL(2, \mathbb{C}) \\ (X, Y, Z, W) \quad & \mapsto \quad [(X, Y, Z, W)] = \{g \cdot (X, Y, Z, W) : g \in GL(2, \mathbb{C})\} . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Temos que o espaço das órbitas da acção de $GL(2, \mathbb{C})$ em S, $\mathcal{S}$, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \pi(S) \quad = \quad & S_{12}/GL(2, \mathbb{C}) \cup S_{13}/GL(2, \mathbb{C}) \cup S_{14}/GL(2, \mathbb{C}) \cup S_{23}/GL(2, \mathbb{C}) \cup \\ & \cup S_{24}/GL(2, \mathbb{C}) \cup S_{34}/GL(2, \mathbb{C}) \cup S_0/GL(2, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

e tendo em conta o teorema 4.1, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \quad = \quad & \{[(0, 0, 1, \infty)], [(0, 1, 0, \infty)], [(0, 1, \infty, 0)], [(0, 1, 1, \infty)], [(0, 1, \infty, 1)], \\ & [(0, 1, \infty, \infty)], [(0, 1, \infty, X)] : X \neq 0, 1, \infty\}. \end{aligned}$$

Por (5.1), considerando o espaço $\mathcal{S}$ munido da topologia quociente e tendo em conta que U_1, U_2 e U_3 são invariantes pela acção de $GL(2, \mathbb{C})$, temos também uma cobertura aberta para $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \pi(U_1) \cup \pi(U_2) \cup \pi(U_3),$$

onde

$$\begin{aligned}
\pi(U_1) &= U_1/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= S_{14}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{24}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{34}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_0/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= \{[(0,1,\infty,X)] : X \in \mathbb{P}^1\} \\
\pi(U_2) &= U_2/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= S_{12}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{13}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{14}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_0/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= \{[(X,0,1,\infty)] : X \in \mathbb{P}^1\} \\
\pi(U_3) &= U_3/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= S_{12}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{23}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_{24}/GL(2,\mathbb{C}) \cup S_0/GL(2,\mathbb{C}) \\
&= \{[(0,X,1,\infty)] : X \in \mathbb{P}^1\},
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{S}$ tem uma cobertura por três cópias de $\mathbb{P}^1$.

Proposição 5.1. *As aplicações mudança de carta entre $\pi(U_1)$, $\pi(U_2)$ e $\pi(U_3)$ são algébricas.*

Demonstração. Comecemos por ver que

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_{12}: & \pi(U_1)|_{\pi(U_2)} & \longrightarrow & \pi(U_2)|_{\pi(U_1)} \\
& (0,1,\infty,X) & \longmapsto & (g(0),0,1,\infty)
\end{array}$$

é algébrica, onde $g \in PGL(2,\mathbb{C})$ é tal que $g(1)=0$, $g(\infty)=1$ e $g(X)=\infty$. Vejamos qual é a (única) aplicação $g \in PGL(2,\mathbb{C})$ nestas condições. Seja $X=[x_1 : x_2]$. Note-se que $X \neq 1,\infty$ pois $(0,1,\infty,X) \in \pi(U_1)\cap\pi(U_2)$, pelo que $x_2 \in \mathbb{C}^*$ e $x_1 \neq x_2$. Suponhamos que g é representada matricialmente por

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tais que $ad-bc \neq 0$. Temos que

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

com $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$, pelo que

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c+d=\lambda_1 \end{cases}.$$

Também temos

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

com $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, pelo que vem

$$a=c.$$

Temos ainda que

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $\lambda_3 \in \mathbb{C}^*$, pelo que vem

$$\begin{cases} a=\frac{\lambda_3}{x_1-x_2} \\ d=-\frac{\lambda_3 x_1}{x_2(x_1-x_2)} \end{cases}.$$

Assim, g é representada matricialmente (a menos da multiplicação por um número complexo não nulo) por:

$$G=\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1-x_2} & -\frac{1}{x_1-x_2} \\ \frac{1}{x_1-x_2} & -\frac{x_1}{x_2(x_1-x_2)} \end{pmatrix},$$

e $g(0)$ é dado por

$$G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{x_1-x_2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{12}: & \pi(U_1)|_{\pi(U_2)} & \rightarrow & \pi(U_2)|_{\pi(U_1)} \\ & (0,1,\infty,[x_1:x_2]) & \mapsto & ([x_2:x_1],0,1,\infty) \end{array},$$

pelo que é uma aplicação algébrica. De modo análogo vemos que φ_{13} é dada por

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{13}: & \pi(U_1)|_{\pi(U_3)} & \rightarrow & \pi(U_3)|_{\pi(U_1)} \\ & (0,1,\infty,[x_1:x_2]) & \mapsto & (0,[x_2:x_2-x_1],1,\infty) \end{array},$$

pelo que é uma aplicação algébrica, e φ_{23} é dada por

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{23}: & \pi(U_2)|_{\pi(U_3)} & \rightarrow & \pi(U_3)|_{\pi(U_2)} \\ & ([x_1:x_2],0,1,\infty) & \mapsto & (0,[x_1:x_1-x_2],1,\infty) \end{array},$$

pelo que é uma aplicação algébrica. ■

O espaço $\mathcal{S}$ é um espaço localmente Hausdorff, ou seja, cada ponto de $\mathcal{S}$ pertence a um aberto $U \subset \mathcal{S}$ que é Hausdorff. Vejamos que o espaço $\mathcal{S}$ não é, no entanto, um espaço Hausdorff. Sejam U e V subconjuntos abertos de $\mathcal{S}$ tais que $[(0,0,1,\infty)] \in U$ e $[(0,1,\infty,\infty)] \in V$. Vejamos que $U \cap V \neq \emptyset$. O conjunto $\mathcal{S}$ está munido da topologia quociente, pelo que como U é aberto de $\mathcal{S}$ então $p^{-1}(U) = \tilde{U}$ é aberto de S tal que

$$S_{12} = \{(g \cdot 0, g \cdot 0, g \cdot 1, g \cdot \infty) : g \in GL(2,\mathbb{C})\} \subseteq \tilde{U},$$

e como V é aberto de $\mathcal{S}$ então $p^{-1}(V) = \tilde{V}$ é aberto de S tal que

$$S_{34} = \{(g \cdot 0, g \cdot 1, g \cdot \infty, g \cdot \infty) : g \in GL(2,\mathbb{C})\} \subseteq \tilde{V}.$$

Além disso, é óbvio que $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ são invariantes pela acção de $GL(2,\mathbb{C})$.

Por hipótese, temos que $(0,0,1,\infty) \in S_{12} \subseteq \tilde{U} \subseteq S \subseteq (\mathbb{P}^1)^4$ e $(0,1,\infty,\infty) \in S_{34} \subseteq \tilde{V} \subseteq S \subseteq (\mathbb{P}^1)^4$. Assim, para $x \in \mathbb{C}$ suficientemente perto de $0 \in \mathbb{C}$, vem que

$$(0,[x:1],1,\infty) \in \tilde{U}, \tag{5.3}$$

e para $y \in \mathbb{C}$ suficientemente perto de $0 \in \mathbb{C}$, vem que

$$(0,1,[1:y],\infty) \in \tilde{V}. \tag{5.4}$$

Seja $x = y \neq 0$ tal que (5.3) e (5.4) se verificam, isto é, consideremos os pontos

$$(0,[x:1],1,\infty) \in \tilde{U} \;\; e \;\; (0,1,[1:x],\infty) \in \tilde{V}.$$

Seja $g \in GL(2,\mathbb{C})$ a aplicação representada matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$g \cdot (0,[x:1],1,\infty) = (0,1,[1:x],\infty)$$

pelo que, como

$$GL(2,\mathbb{C}) \cdot \tilde{U} = \tilde{U} \;\text{ e }\; GL(2,\mathbb{C}) \cdot \tilde{V} = \tilde{V},$$

vem que

$$\begin{aligned}(0,[x:1],1,\infty) &\in \tilde{U}\cap\tilde{V} \ e\\ g\cdot(0,[x:1],1,\infty) &= (0,1,[1:x],\infty)\in\tilde{U}\cap\tilde{V},\end{aligned}$$

isto é,

$$\emptyset\neq\tilde{U}\cap\tilde{V}=p^{-1}(U)\cap p^{-1}(V)\subseteq S$$

e logo

$$U\cap V\neq\emptyset$$

pois existe $X\neq 0$ tal que $[(0,X,1,\infty)]\in U\cap V$. Concluimos assim que $\mathcal{S}$ não é Hausdorff.

Note-se que as aderências em $(\mathbb{P}^1)^4$ das órbitas de $(0,0,1,\infty)$ e $(0,1,\infty,\infty)$ se intersectam em $(0,0,\infty,\infty)$.

De modo análogo, vemos que dados U e V subconjuntos abertos de $\mathcal{S}$ tais que $[(0,1,1,\infty)]\in U$ e $[(0,1,\infty,0)]\in V$ temos que $U\cap V\neq\emptyset$, e dados U e V subconjuntos abertos de $\mathcal{S}$ tais que $[(0,1,0,\infty)]\in U$ e $[(0,1,\infty,1)]\in V$ temos que $U\cap V\neq\emptyset$.

5.3 Espaço Moduli dos Fibrados Quase-Parabólicos Simples

Vimos na secção anterior que o espaço $\mathcal{S}$ não é Hausdorff. Queremos agora identificar o espaço Hausdorff, $\mathcal{S}_H$, obtido de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_H=\mathcal{S}/\sim \tag{5.5}$$

onde dados $P,Q\in\mathcal{S}$ temos $P\sim Q$ se e só se $U_P\cap U_Q\neq\emptyset$ para todas as vizinhanças U_P e U_Q de P e Q, respectivamente. Tendo em conta o estudo anterior do espaço $\mathcal{S}$, concluimos que são necessárias três identificações:

$$\begin{aligned}[][(0,0,1,\infty)] &\sim [(0,1,\infty,\infty)]\\ [(0,1,1,\infty)] &\sim [(0,1,\infty,0)]\\ [(0,1,0,\infty)] &\sim [(0,1,\infty,1)]\end{aligned} \tag{5.6}$$

Consideremos o espaço $\mathcal{S}_{\tilde{H}} = \mathcal{S}/\sim$, onde a relação $\sim$ é definida pelas identificações (5.6), munido da topologia quociente dada pela aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\pi}: & \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{S}_{\tilde{H}} \\ & [(X,Y,Z,W)] & \mapsto & [(X,Y,Z,W)]_{\sim} \end{array} \tag{5.7}$$

onde $[(X,Y,Z,W)]_{\sim} = \{[(X',Y',Z',W')] \in \mathcal{S} : [(X',Y',Z',W')] \sim [(X,Y,Z,W)]\}$. Queremos ver que estas são, de facto, as únicas identificações que devem ser feitas em $\mathcal{S}$ para obtermos o espaço $\mathcal{S}_H$. Note-se que

$$\mathcal{S} = \pi(U_1) \cup \{[(0,1,0,\infty)], [(0,0,1,\infty)], [(0,1,1,\infty)]\}$$

e que em $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$ estamos a identificar cada um dos pontos $[(0,1,0,\infty)]$, $[(0,0,1,\infty)]$ e $[(0,1,1,\infty)]$ com um ponto de $\pi(U_1)$, pelo que

$$\mathcal{S}_{\tilde{H}} = \{[(0,1,\infty,X)]_{\sim} : X \in \mathbb{P}^1\}.$$

Seja $(X,Y,Z,W) \in U_1$. Pelo teorema 4.1 temos que existe um único $g = g(X,Y,Z) \in PGL(2,\mathbb{C})$ tal que $g \cdot (X,Y,Z,W) = (0,1,\infty, g \cdot W)$. Considerando $X = [X_1 : X_2]$, $Y = [Y_1 : Y_2]$, $Z = [Z_1 : Z_2]$, $W = [W_1 : W_2]$, com $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in \mathbb{C}$, e fazendo alguns cálculos, vemos que, a menos do produto por uma constante complexa, g é representada matricialmente, por:

$$g(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} -\frac{X_2}{X_1Y_2 - X_2Y_1} & \frac{X_1}{X_1Y_2 - X_2Y_1} \\ \frac{Z_2}{Y_1Z_2 - Y_2Z_1} & -\frac{Z_1}{Y_1Z_2 - Y_2Z_1} \end{pmatrix}.$$

Note-se que $X_1Y_2 - X_2Y_1 \neq 0$ e $Y_1Z_2 - Y_2Z_1 \neq 0$ porque, por hipótese, $(X,Y,Z,W) \in U_1$ pelo que $X \neq Y \neq Z \neq X$. Seja $h : U_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ a aplicação definida por

$$\begin{aligned} h((X,Y,Z,W)) &= g(X,Y,Z) \cdot W \\ &= \left[\frac{-X_2W_1 + X_1W_2}{X_1Y_2 - X_2Y_1} : \frac{Z_2W_1 - Z_1W_2}{Y_1Z_2 - Y_2Z_1} \right] \\ &= [(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)(-X_2W_1 + X_1W_2) : (X_1Y_2 - X_2Y_1)(Z_2W_1 - Z_1W_2)]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Temos que h é uma aplicação contínua.

Consideremos agora a aplicação $\psi : S \to \mathbb{P}^1$ definida por

$$\psi(X,Y,Z,W) = \begin{cases} h(X,Y,Z,W) & \text{se } (X,Y,Z,W) \in U_1, \\ 0 & \text{se } (X,Y,Z,W) \in S_{23}, \\ 1 & \text{se } (X,Y,Z,W) \in S_{13}, \\ \infty & \text{se } (X,Y,Z,W) \in S_{12}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Proposição 5.2. *A aplicação $\psi : S \to \mathbb{P}^1$ é contínua.*

Demonstração. A restrição de ψ ao aberto $U_1 \subset S$ é contínua pois h é uma aplicação contínua. Basta então provar que ψ é contínua nos pontos de $S \setminus U_1 = S_{12} \cup S_{13} \cup S_{23}$. Vamos provar a continuidade em S_{12}. Seja $(X,X,Z,W) \in S_{12}$. Consideremos uma sucessão em S, $P_n = (X_n, Y_n, Z_n, W_n)$, com $\lim P_n = (X,X,Z,W)$. Vejamos que $\lim \psi(P_n) = \psi(X,X,Z,W) = \infty$. Note-se que $\psi((X_n, X_n, Z_n, W_n)) = \infty$, pelo que podemos assumir que $X_n \neq Y_n$, sem perda de generalidade. Mas então temos que, a partir de determinada ordem n, $(X_n, Y_n, Z_n, W_n) \subset U_1$ e assim

$$\psi((X_n, Y_n, Z_n, W_n)) = h(X_n, Y_n, Z_n, W_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

pelo modo como definimos a aplicação h em (5.8). Logo ψ é contínua em S_{12}. De modo análogo vemos que ψ é contínua em S_{13} e em S_{23}. ■

Corolário 5.3. *A aplicação induzida*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi} : & \mathcal{S}_{\tilde{H}} & \to & \mathbb{P}^1 \\ & [(0,1,\infty,X)]_\sim & \mapsto & X \end{array} \tag{5.10}$$

é contínua.

Demonstração. Considerando as aplicações π, em (5.2), $\tilde{\pi}$, em (5.7), e ψ, em (5.9)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle \tilde{\pi}\circ\pi} \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{S}_{\tilde{H}} & & \end{array}$$

temos que

$$\tilde{\psi} = \psi \circ \pi^{-1} \circ \tilde{\pi}^{-1}.$$

Seja $[(0,1,\infty,X)]_{\sim} \in \mathcal{S}_{\tilde{H}}$. Temos que

$$\psi\left((\pi^{-1} \circ \tilde{\pi}^{-1})\left(\{[(0,1,\infty,X)]_{\sim}\}\right)\right) = \{X\},$$

ou seja, ψ é constante em cada conjunto $(\pi^{-1} \circ \tilde{\pi}^{-1})\left(\{[(0,1,\infty,X)]_{\sim}\}\right)$, para $[(0,1,\infty,X)]_{\sim} \in \mathcal{S}_{\tilde{H}}$. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{P}^1$. A continuidade de ψ implica que

$$\psi^{-1}(U) = \left(\pi^{-1} \circ \tilde{\pi}^{-1}\right)\left(\tilde{\psi}^{-1}(U)\right)$$

é aberto em S. Como π e $\tilde{\pi}$ são aplicações quociente então $\tilde{\psi}^{-1}(U)$ tem que ser aberto em $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$, concluindo-se assim que $\tilde{\psi}$ é contínua. ■

Corolário 5.4. *O espaço $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $P, Q \in \mathcal{S}_{\tilde{H}}$ e consideremos as suas imagens $\tilde{\psi}(P)$ e $\tilde{\psi}(Q)$. O espaço $\mathbb{P}^1$ com a topologia complexa é Hausdorff, pelo que existem abertos $U, V \subset \mathbb{P}^1$ tais que $\tilde{\psi}(P) \in U$, $\tilde{\psi}(Q) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. A aplicação $\tilde{\psi}$ é contínua (corolário 5.3) pelo que $\tilde{\psi}^{-1}(U)$ e $\tilde{\psi}^{-1}(V)$ são subconjuntos abertos de $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$ tais que $P \in \tilde{\psi}^{-1}(U)$ e $Q \in \tilde{\psi}^{-1}(V)$. Além disso, como $\tilde{\psi}$ é uma aplicação injectiva, temos que $\tilde{\psi}^{-1}(U) \cap \tilde{\psi}^{-1}(V) = \emptyset$. Logo o espaço $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$ é Hausdorff. ■

Concluimos deste modo que as identificações (5.6) feitas em $\mathcal{S}_{\tilde{H}}$ são as identificações necessárias e suficientes para obtermos o espaço Hausdorff $\mathcal{S}_H$ descrito em (5.5), pelo que $\mathcal{S}_{\tilde{H}} = \mathcal{S}_H$.

Consideremos agora a aplicação definida por:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathcal{S}_{\tilde{H}} \\ & X & \mapsto & [(0,1,\infty,X)]_{\sim} \end{array}.$$

Temos que $\tilde{\varphi} = \tilde{\pi} \circ \pi \circ \varphi$, onde $\tilde{\pi}$ é a aplicação definida em (5.7), π é a aplicação definida em (5.2) e φ é a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^1 & \to & S \\ & X & \mapsto & (0,1,\infty,X) \end{array},$$

pelo que, como as aplicações $\tilde{\pi}$, π e φ são contínuas, concluimos que $\tilde{\varphi}$ é uma aplicação contínua. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} &= Id_{\mathbb{P}^1} \\ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} &= Id_{\mathcal{S}_{\tilde{H}}}, \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\varphi}$ é a aplicação inversa de $\tilde{\psi}$. Temos então a seguinte proposição,

Proposição 5.5. *Os espaços $\mathcal{S}_H$ e $\mathbb{P}^1$ são homeomorfos.*

Vimos, deste modo, que o espaço moduli $\mathcal{S}_H$ dos fibrados quase-parabólicos simples que têm $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_1)$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, como fibrado subjacente é homeomorfo a $\mathbb{P}^1$. Definimos assim $\mathcal{S}_H \cong \mathbb{P}^1$ como variedade.

Proposição 5.6. *O espaço $\mathcal{S}_H$ é um espaço moduli grosseiro para o problema de moduli da classificação dos fibrados quase-parabólicos simples a menos de isomorfismo, com as identificações adicionais dadas em (5.6).*

Demonstração. Tendo em conta a proposição 4.6 vemos que $\mathcal{S}_H$ tem a propriedade universal de um espaço moduli grosseiro. ■

Bibliografia

[FS 92] M. Furuta e B. Steer, *Seifert Fibred Homology 3-Spheres and the Yang-Mills Equations on Riemann Surfaces with Marked Points*, Advances in Mathematics 96, 38-102 (1992).

[GH 78] P. Griffiths e J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York (1978).

[Harr 92] J. Harris, *Algebraic Geometry - A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 133, Springer-Verlag (1992).

[Hart 77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer (1977).

[HSW 99] N. J. Hitchin, G. B. Segal e R. S. Ward, *Integrable Systems - Twisters, Loop Groups, and Riemann Surfaces*, Oxford (1999).

[JS 87] G. A. Jones e D. Singerman, *Complex Functions. An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press (1987).

[K 93] G. R. Kempf, *Algebraic Varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series 172, Cambridge University Press (1993).

[MS 80] V. B. Mehta e C. S. Seshadri, *Moduli of Vector Bundles on Curves with Parabolic Structures*, Math. Ann. 248, 205-239 (1980).

[Mi 97] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics 5, American Mathematical Society (1997).

[Mu 03] S. Mukai, *An Introduction to Invariants and Moduli*, Cambridge studies in advanced mathematics 81 (2003).

[NS 65] M. S. Narasimhan e C. S. Seshadri, *Stable and Unitary Vector Bundles on a Compact Riemann Surface*, Ann. of Math. 82, 540-567 (1965).

[N 78] P. E. Newstead, *Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1978).

[P 97] J. Le Potier, *Lectures on Vector Bundles*, Cambridge studies in advanced mathematics 54 (1997).

[S 82] C. S. Seshadri, *Fibrés Vectoriels sur les Courbes Algébriques*, Société Mathématique de France (1982).