APONTAMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL EXTERIOR

Carlos Rocha

May 6, 1993

Conteúdo

Prefácio

Os apontamentos que se seguem constituem uma introdução ao cálculo diferencial exterior e foram coligidos durante um curso de Análise Matemática III, leccionado em 86-87 a uma turma especial constituida por um grupo de alunos que voluntariamente seguiram um curso mais extenso e aprofundado que o curso habitualmente leccionado nas licenciaturas de engenharia. Um curso semelhante anteriormente leccionado por Luís Magalhães proporcionou a experiência e as notas às quais estes apontamentos ficam a dever.

Tendo voltado a leccionar a turma especial em 91-92 verifiquei que estas notas após algumas adaptações continuam a ser de utilidade para os alunos complementando em certos aspectos a descrição desta matéria que se encontra actualmente feita nas folhas de Complementos de Cálculo Diferencial de Luís Magalhães.

A bibliografia indicada neste capítulo do curso inclui os livros Calculus on Manifolds de M. Spivak e Functions of Several Variables de W. Fleming.

Se estas notas ficam a dever muito ao apoio de Luís Magalhães, não ficam a dever menos ao esforço e deliberação semanal dos alunos que constituiram uma fonte insubstituível de motivação. Ao primeiro agradeço, aos segundos dedico estas folhas.

1. Introdução - Vectores e Covectores

O espaço vectorial linear $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ diz-se um espaço Euclidiano. Os elementos deste espaço vectorial dizem-se **vectores** (contravectores). Sendo $e_1, \ldots, e_n$ uma base do espaço, qualquer vector $v \in \mathbb{R}^n$ se pode representar pelas suas componentes (contravariantes) $v = (v^1, \ldots, v^n) = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, apresentadas matricialmente na forma de coluna.

Ao conjunto dos funcionais lineares definidos sobre $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dá-se o nome de **espaço dual** de $\mathbb{R}^n$ e denota-se por $(\mathbb{R}^n)^*$. Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ são chamados **covectores**.

Sendo $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ um covector fixo, é um exercício simples mostrar que existem $(a_1, \ldots, a_n)$, números reais, tais que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ temos $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n a_i v^i$, podendo identificar-se φ com $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Assim, o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vectorial linear isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e os covectores podem-se representar por matrizes linha $a = (a_1, \ldots, a_n)$ sendo a_i as componentes (covariantes) de $a \in (\mathbb{R}^n)^*$, e introduzindo-se o **produto escalar** entre elementos de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$, $a \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i v^i$.

Define-se a **base natural** para o espaço dual constituida pelos funcionais $(e^1, \ldots, e^n)$ satisfazendo $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$.

Dada uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e sendo $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ bases respectivamente de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, temos que $t = \sum_{j=1}^n t^j e_j \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^m x^i \epsilon_i \in \mathbb{R}^m$ e se $x = L(t)$ obtemos $x^i = \sum_{j=1}^n c^i_j t^j$ onde c^i_j são as componentes dos vectores $v_j = L(e_j)$. Pode assim representar-se L pela matriz cujas colunas são os vectores v_j, e as componentes do vector t transformam-se nas do vector x multiplicando matricialmente por $L = [c^i_j]$ à **esquerda**.

$$L = \begin{pmatrix} c^1_1 & \ldots & c^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_1 & \ldots & c^n_n \end{pmatrix}$$

Considerando agora os espaços duais podemos a partir de L definir uma transformação linear $L^* : (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ da seguinte forma. Dado que $x = L(t)$, temos que $x^i = L^i(t)$ onde L^i são funcionais lineares sobre $\mathbb{R}^n$, definindo covectores $w^1, \ldots, w^m$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ representados pelas linhas da matriz $L = [c^i_j]$, $L^i(t) = w^i \cdot t$, com $w^i = \sum_{j=1}^n c^i_j e^j$ onde $(e^1, \ldots, e^n)$ é a base natural de $(\mathbb{R}^n)^*$ referida.

Então, dado um covector $a = (a_1, \ldots, a_m) \in (\mathbb{R}^m)^*$ definimos a transformação dual L^* por $L^*(a) = \sum_{i=1}^m a_i w^j \in (\mathbb{R}^m)^*$. Sendo $b = L^*(a)$, temos $b = \sum_{j=1}^n b_j e^j$ e de $w^i = \sum_{j=1}^n c_j^i e^j$ obtem-se $b = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n c_j^i e^j$ e portanto $b_j = \sum_{i=1}^m a_i c_j^i$. Conclui-se assim que as componentes do covector a se transformam nas do covector b multiplicando matricialmente por $L = [c_j^i]$ à **direita**.

$$b \cdot t = a \cdot x \Longleftrightarrow L^*(a) \cdot t = a \cdot L(t)$$

No caso em que $n = m$ e L é não singular, se pretendermos identificar $\mathbb{R}^n$ com o dual $(\mathbb{R}^m)^*$ verificamos que a transformação induzida por L em $(\mathbb{R}^n)^*$ é $(L^*)^{-1}$ e $L^* = L^T$ e portanto os **vectores** e os **covectores** transformam-se em geral de **maneira diferente**.

As formas diferenciais são introduzidas pela necessidade de se considerarem funções que associam números reais a certos tipos de variedades. Apresentam-se seguidamente alguns exemplos extraídos do Electromagnetismo, onde a quantidade final (um número real) se obtem por integração das grandezas referidas sobre as variedades indicadas:

(1) Campo Eléctrico : curva $\rightarrow$ trabalho

(2) Corrente : superfície $\rightarrow$ intensidade de corrente

(3) Densidade de Carga : volume $\rightarrow$ carga

Acrescenta-se como caso especial a função escalar habitual

(0) Potencial Eléctrico : ponto $\rightarrow$ potencial

Tendo em consideração os primeiros exemplos apresentados, é natural definirem-se integrandas especiais (formas diferenciais de ordem k) a fim de se obter o resultado final por integração sobre a variedade (de dimensão k) pretendida.

2. Definições e Exemplos

Designaremos seguidamente por $V = \mathbb{R}^n$ o espaço vectorial de base, e seja $V^k = V \times \ldots \times V$.

Definições: Uma função $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ **multilinear** diz-se um **tensor (covariante) de ordem k em V**, (tensor-k) ou **covector-k**. O espaço das aplicações multilineares de V^k em $\mathbb{R}$ (conjunto dos tensores-k) designa-se por $\mathcal{T}^k(V)$.

Nota: $\mathcal{T}^k(V)$ é um espaço vectorial linear (de dimensão n^k). Acordaremos por tomar por definição $\mathcal{T}^0(V)$ como o espaço das funções escalares.

Exemplos:

(1) $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ é o nosso conhecido espaço dual constituído por covectores. Assim $e^i \in \mathcal{T}^1(V)$, para $i = 1, \ldots, n$.

(2) Dados $v, w \in V$ a função $\varphi(v, w) = \langle v, w \rangle (\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definida pelo produto interno em V é bilinear, e portanto $\varphi \in \mathcal{T}^2(V)$.

(3) Dados $v_1, \ldots, v_n \in V$ a função $\delta(v_1, \ldots, v_n) = \det V$ onde V representa a matriz $v = [v_1, \ldots, v_n]$ é multilinear e portanto $\delta \in \mathcal{T}^n(V)$.

Nota: Os tensores como neste último exemplo possuem uma propriedade adicional. Além de serem funções multilineares são **alternados**, isto é,

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$.

De igual forma se pode definir o conjunto dos **tensores contravariantes** de ordem k sobre V:

Definição: As funções em $\mathcal{T}^k(V^*)$ dizem-se **tensores contravariantes** de ordem k ou **vectores-k**.

Sendo $L : V \to W$ uma transformação linear de $V = \mathbb{R}^n$ para $W = \mathbb{R}^m$, por extensão da definição anterior, podemos definir a transformação $L^* : \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$, da seguinte forma:

Definição: Dada a transformação linear $L : V \to W$, define-se $L^* : \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$ fazendo corresponder a cada $T \in \mathcal{T}^k(W)$ o tensor $L^*T \in \mathcal{T}^k(V)$ dado por $L^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(Lv_1, \ldots, Lv_k)$ para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$.

3. Álgebra Multilinear

Entre os vários espaços tensoriais define-se uma operação chamada **produto tensorial** para estes espaços.* Note-se que esta operação se define

*Nesta secção, a referência aos produtos tensoriais não é necessária podendo eliminar-se do encadeamento do texto.

entre vários espaços ($\otimes : \mathcal{T}^k(V) \times \mathcal{T}^l(V) \to \mathcal{T}^{k+l}(V)$) não sendo portanto "interna"a um só espaço.

Definição: Sendo $T \in \mathcal{T}^k(V)$ e $S \in \mathcal{T}^l(V)$ define-se $R = T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ por: $R(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) = T(v_1, \ldots, v_k)S(w_1, \ldots, w_l)$ para todos $v_i, w_j \in V$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$.

São fácilmente verificáveis as seguintes propriedades:

(a) $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$

(b) $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$

(c) $a(S \otimes T) = (aS) \otimes T = S \otimes (aT)$

(d) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

Como sabemos os covectores $e^1, \ldots, e^n$ formam uma base de $\mathcal{T}^1(V)$. Naturalmente $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} \in \mathcal{T}^k(V)$ e temos:

Proposição: Os covectores-k $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$, em número de n^k, formam uma base do espaço $\mathcal{T}^k(V)$.

Demonstração: (a) Dada a combinação linear representando o covector nulo:

$$S = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} = 0$$

temos:

$$S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k} = 0$$

e portanto $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ são linearmente independentes.

(b) Seja $T \in \mathcal{T}^k(V)$ e $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i \in V$; $1 \leq j \leq k$ vectores de V. Então:

$$T(v_1, \ldots, v_k) = T(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

Mas $e^i \cdot v_j = v_j^i$ e portanto $v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} = (e_1^i \otimes \ldots \otimes e_k^i) \cdot (v_1, \ldots, v_k)$. Tomando $a_{i_1,\ldots,i_k} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ temos:

$$T(v_1, \ldots, v_k) = (\sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k})\,(v_1, \ldots, v_k),$$

concluindo-se que $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ geram $\mathcal{T}^k(V)$.

Na seção anterior, quando se definiram os espaços tensoriais, apresentámos alguns exemplos de tensores com a propriedade adicional de serem **alternados**. Os exemplos apresentados relacionam-se naturalmente com a função V utilizada nos integrais de superfície para medir volumes de paralelipípedos. Por estarmos interessados precisamente em estudar os vários volumes-n, tem especial interesse estudar os tensores com aquela propriedade.

Recordamos da álgebra linear que sendo $\sigma \in \prod(1, \ldots, k)$ uma permutação de $(1, \ldots, k)$ se define o sinal da permutação por $\text{sgn}\ \sigma = \pm 1$, com sinal positivo se a permutação fôr par e sinal negativo se a permutação fôr impar.

Definição: O tensor $T \in \mathcal{T}^k(V)$ diz-se **alternado** se dada uma permutação σ se tem:

$$T(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = \text{sgn}\ \sigma \cdot T(v_1, \ldots, v_k)$$

para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Nota: Esta definição é equivalente à definição anterior.

Proposição: O subconjunto dos tensores alternados de ordem k é um subespaço vectorial de $\mathcal{T}^k(V)$.

Nota: Para $k > n$ o único tensor alternado é o trivial; $T = 0$.

Definição: Designa-se por $\Omega^k(V)$ o espaço dos tensores covariantes alternados de ordem k. Análogamente $\Omega^k(V^*)$ designa o conjunto dos tensores contravariantes alternados de ordem k.

Com o objectivo de introduzir uma representação para as formas diferenciais, observamos que $\Omega^k(V)$ são espaços vectoriais (de dimensão menor ou igual a n^k) e procuramos uma sua base. Designando por λ o multi-índice $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$ seja e^λ a função definida por:

$$e^\lambda(h_1, \ldots, h_k) = \det\ (h_q^{i_p}) = \det \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h_1 & \ldots & h_k \end{array} \\ \begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_k \end{array} & \begin{pmatrix} h_1^{i_1} & \ldots & h_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{i_k} & \ldots & h_k^{i_k} \end{pmatrix} \end{array}$$

para $h_1, \ldots, h_k \in V$. Fácilmente se verifica que e^λ é multilinear e alternada, portanto $e^\lambda \in \Omega^k(V)$.

Exercício: Verificar que sendo $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$, $\mu = (j_1, \ldots, j_k)$ temos $e^\lambda(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta^\lambda_\mu$ onde: $\delta^\lambda_\mu = \text{sgn}\ \sigma$, se λ não tem índices repetidos e μ é uma permutação σ de λ; e $\delta^\lambda_\mu = 0$, caso contrário.

Nota: Define-se $e^\lambda = 0$ se $k > n$.

Definição: O multi-índice $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$ diz-se **crescente** se satisfaz a ordenação $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Proposição: Os tensores e^λ com λ crescente formam uma base de $\Omega^k(V)$.

Demonstração: (a) Seja S uma combinação linear de e^λ representando o tensor nulo

$$S = \sum_{[\lambda]} a_\lambda\, e^\lambda = 0 \quad ,$$

onde a notação $[\lambda]$ designa que o somatório se extende apenas a λ crescentes. Então, para $\mu = (j_1, \ldots, j_k)$ crescente temos:

$$S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{[\lambda]} a_\lambda\, \delta^\lambda_\mu = a_\mu = 0 \quad ,$$

e portanto os e^λ são linearmente independentes.

(b) Seja $\omega \in \Omega^k(V)$ um tensor alternado e $v_j = \sum_{i=1}^n v^i_j e_i$, $j = 1, \ldots, k$, vectores de V. Então:

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega\Big(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}\Big) = \sum_{\lambda=(i_1,\ldots,i_k)} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

$$= \sum_{[\lambda]} \Big(\sum_{\sigma \in \prod \lambda} \text{sgn}\ \sigma\ v_1^{\sigma_1} \ldots v_k^{\sigma_k} \Big)\, \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \sum_{[\lambda]} \det\ (v_p^{i_q})\, \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \quad .$$

Mas $e^\lambda(v_1, \ldots, v_k) = \det\ (v_p^{i_q})$ e definindo $\omega_\lambda = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ temos:

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda\, e^\lambda(v_1, \ldots, v_k)$$

concluindo-se que os e^λ com λ crescente geram o espaço $\Omega^k(V)$.

Notas: Tem-se $\dim\ \Omega^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ e naturalmente $\mathcal{T}^1(V) = \Omega^1(V)$.

Representação: $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda\, e^\lambda.$

Definição: Designa-se por dual do vector $h = (h^1, \ldots, h^n)$ de V o covector-1 $h^* = (h_1^*, \ldots, h_n^*)$ com as mesmas componentes de h, $h_i^* = h^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Nota: Facilmente se verifica que a aplicação $h \mapsto h^*$ corresponde a um isomorfismo entre V e V^*.

Entre os vários espaços $\Omega^k(V)$, $k = 1, 2, ...$, define-se a operação **produto exterior**. Sendo $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$ e $\mu = (j_1, \ldots, j_l)$ dois multi-índices define-se o multi-índice $\lambda\mu = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$. Então, dados dois tensores alternados, $\omega \in \Omega^k(V)$ e $\zeta \in \Omega^l(V)$, define-se o seu **produto exterior** $\omega \wedge \zeta \in \Omega^{k+l}(V)$ da seguinte forma:

Definição: Para $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq l \leq n$ e sendo λ e μ crescentes, define-se:

$$e^\lambda \wedge e^\mu = e^{\lambda\mu} \quad ,$$

e sendo $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda$ e $\zeta = \sum_{[\mu]} \zeta_\mu e^\mu$ define-se:

$$\omega \wedge \zeta = \sum_{[\lambda][\mu]} \omega_\lambda \, \zeta_\mu \, e^\lambda \wedge e^\mu \quad .$$

Exemplos: $n = 4$

(a) $e^{12} \wedge e^{34} = e^{1234}$

(b) $e^3 \wedge e^{124} = e^{3124} = e^{1234}$

(c) $e^{14} \wedge e^{24} = e^{1424} = 0$.

Propriedades:

(1) $(\omega + \zeta) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \zeta \wedge \eta$

(2) $(c\omega) \wedge \zeta = c(\omega \wedge \zeta)$ onde $\omega \in \Omega^k(V)$, $\zeta \in \Omega^l(V)$

(3) $\zeta \wedge \omega = (-1)^{kl} \, \omega \wedge \zeta$

(4) $(\zeta \wedge \omega) \wedge \eta = \zeta \wedge (\omega \wedge \eta)$

Observação: Para demonstrar (4) considerar primeiro os tensores da base, e^λ.

Naturalmente, para tensores da mesma ordem define-se o seu **produto interno** e a norma induzida, visto $\Omega^k(V)$ ser um espaço vectorial. Para

$\alpha, \beta \in \Omega^k(V)$ com $\alpha = \sum_{[\lambda]} \alpha_\lambda \, e^\lambda$, $\beta = \sum_{[\lambda]} \beta_\lambda \, e^\lambda$ temos:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{[\lambda]} \alpha_\lambda \, \beta_\lambda$$

$$|\alpha| = (\alpha \cdot \alpha)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{[\lambda]} (\alpha_\lambda)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Define-se uma estrutura análoga para os tensores contravariantes alternados $\Omega^k(V^*)$, onde os tensores da base e_λ são agora definidos por:

$$e_\lambda(a^1, \ldots, a^k) = \det \, (a^p_{i_q}) = \det \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} i_1 & \ldots & i_k \end{array} \\ \begin{array}{c} a^1 \\ \vdots \\ a^k \end{array} & \begin{pmatrix} a^1_{i_1} & \ldots & a^1_{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_{i_1} & \ldots & a^k_{i_k} \end{pmatrix} \end{array}$$

para $a^1, \ldots, a^k \in V^*$. Tomando $\gamma = \sum_{[\lambda]} \gamma^\lambda \, e_\lambda$ e $\xi = \sum_{[\lambda]} \xi^\lambda \, e_\lambda$ os produtos exterior e interno são dados por:

$$\gamma \wedge \xi = \textstyle\sum_{[\lambda][\mu]} \gamma^\lambda \, \xi^\mu \, e_\lambda \wedge e_\mu \ , \text{ com } e_\lambda \wedge e_\mu = e_{\lambda\mu}$$

$$\gamma \cdot \xi = \textstyle\sum_{[\lambda]} \gamma^\lambda \, \xi^\lambda \quad , \quad |\gamma| = (\gamma \cdot \gamma)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Define-se igualmente o produto escalar:

$$\omega \cdot \gamma = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda \, \gamma^\lambda \ .$$

Nota: Podemos naturalmente identificar os espaços $\Omega^1(V^*) = \mathcal{T}^1(V^*)$ com V. Assim os vectores de V são tensores-1 contravariantes.

Exercício: Verificar que o volume-k do paralelipípedo definido por $v_1, \ldots, v_k \in V$ é dado por:

$$V_k(v_1, \ldots, v_k) = |v_1 \wedge \ldots \wedge v_k| \ .$$

4. Formas Diferenciais

Podemos agora definir formas diferenciais como funções de $\mathbb{R}^n$ que tomam valores em $\Omega^k(V)$:

Definição: Dado o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, uma função $\omega : U \to \Omega^k(V)$ diz-se uma **forma diferencial** de ordem k em U. Assim, para $p \in U$ temos que $\omega(p) \in \Omega^k(V)$ e ω diz-se uma forma-k.

Utilizando a representação introduzida anteriormente podemos escrever, para cada $p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(p)\, e^\lambda$$

onde os coeficientes ω_λ são funções reais definidas em U, $\omega_\lambda : U \to \mathbb{R}$. Uma forma diferencial diz-se **de classe** C^r, $r \geq 0$, se as suas funções componentes forem de classe C^r.

No conjunto das formas diferenciais vamos de seguida definir a operação **derivada exterior** que nos permite obter uma forma-$(k+1)$ a partir de uma forma-k. Começamos por definir este operador para formas-0.

Dada a forma-0 f (função escalar) de classe C^1 em U, Df representa um operador linear de $V = \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, tratando-se portanto de um funcional linear. Assim, para cada $p \in U$ temos $Df(p) \in \Omega^1(V)$, e Df define uma forma-1. Esta forma diferencial que representaremos por df diz-se o **diferencial exterior** da forma-0f.

Definição: O **diferencial exterior** da forma-0f de classe C^1 é a forma-1 df que para cada $p \in U$ tem por componentes as derivadas parciais de f em p:

$$df(p) = (D_1 f(p), \ldots, D_n f(p))$$

Tomando como caso particular as funções de projecção que normalmente designamos por x^i,

$$x^i : V \to \mathbb{R} \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

temos que $dx^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = e^i$ e portanto obtemos uma nova forma de representação das formas-1:

$$df = D_1 f dx^1 + \ldots + D_n f dx^n$$

ou ainda $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$.

Em completa analogia passaremos a usar a representação:

$$\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

onde $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$.

Notando que as componentes ω_λ são formas-0, podemos agora definir o diferencial exterior para formas-k.

Definição: Dada a forma-k ω de classe C^1 define-se o seu **diferencial exterior** $d\omega$ como sendo a forma-$(k+1)$ representada por:

$$d\omega = \sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

onde $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$.

Nota: Em $\mathbb{R}^3$ é possível estabelecer as seguintes correspondências entre as formas $(0, 1, 2,\, ou\, 3)$ e os campos escalares f ou vectoriais $ae_1 + be_2 + ce_3$:

forma-0	f	$\leftrightarrow$	campo escalar
forma-1	$a\,dx + b\,dy + c\,dz$	$\leftrightarrow$	campo vectorial
forma-2	$a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$	$\leftrightarrow$	campo vectorial
forma-3	$f\,dx \wedge dy \wedge dz$	$\leftrightarrow$	campo escalar

É possível também estabelecer as seguintes relações simples entre o operador d e os habituais operadores grad, rot e div:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Campo escalar } f & \rightarrow & f \\
 & & d\downarrow \\
\text{grad } f & \leftarrow & \text{(forma-1) } df \\
\text{Campo vectorial } f = (a,b,c) & \rightarrow & \omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz \\
 & & d\downarrow \\
\text{(à parte um sinal) rot } f & \leftarrow & \text{(forma-2) } d\omega \\
\text{Campo vectorial } f = (a,b,c) & \rightarrow & \xi = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy \\
 & & d\downarrow \\
\text{div } f & \leftarrow & \text{(forma-3) } d\xi
\end{array}$$

Em conclusão os operadores lineares grad, rot e div são casos particulares do diferencial exterior d.

Exercícios: (1) A título de exercício demonstra-se seguidamente a relação:

$$a^1 \wedge \ldots \wedge a^k \, (v_1, \ldots, v_k) = \det \, (a^p \cdot v_q).$$

Efectivamente

$$a^1 \wedge \ldots \wedge a^k \, (v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j_1} a^1_{j_1} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{j_k} a^k_{j_k} e^{j_k} \, (v_1, \ldots, v_k)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k} (a^1_{j_1} \ldots a^k_{j_k}) e^{j_1,\ldots,j_k} \, (v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j_1,\ldots,j_k} (a^1_{j_1} \ldots a^k_{j_k}) \det \, (v^{j_p}_q)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k} (a^1_{j_1} \ldots a^k_{j_k}) \sum_{\sigma \in \Pi(1,\ldots,k)} \mathrm{sgn} \; \sigma \; (v^{j_{\sigma_1}}_1 \ldots v^{j_{\sigma_k}}_k)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k} \sum_{\sigma \in \Pi(1,\ldots,k)} \mathrm{sgn} \; \sigma \; (a^1_{j_1} \ldots a^k_{j_k})(v^{j_{\sigma_1}}_1 \ldots v^{j_{\sigma_k}}_k)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Pi(1,\ldots,k)} \mathrm{sgn} \; \sigma \sum_{j_1,\ldots,j_k} (a^1_{j_1} \ldots a^k_{j_k})(v^{j_{\sigma_1}}_1 \ldots v^{j_{\sigma_k}}_k)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Pi(1,\ldots,k)} \mathrm{sgn} \; \sigma \sum_{j_1,\ldots,j_k} (a^{\sigma_1}_{j_{\sigma_1}} \ldots a^{\sigma_k}_{j_{\sigma_k}})(v^{j_{\sigma_1}}_1 \ldots v^{j_{\sigma_k}}_k)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Pi(1,\ldots,k)} \mathrm{sgn} \; \sigma \Big(\sum_{i_1} a^{\sigma_1}_{i_1} v^{i_1}_1 \ldots \sum_{i_k} a^{\sigma_k}_{i_k} v^{i_k}_k \Big) = det(a^p \cdot v_q).$$

(2) Mostrar que $\omega(h_1, \ldots, h_k) = \omega \cdot (h^*_1 \wedge \ldots \wedge h^*_k)$.

(3) Usar as expressões anteriores para mostrar que

$$|h_1 \wedge \ldots \wedge h_k| = |h^*_1 \wedge \ldots \wedge h^*_k| = \sqrt{\det \, (h_p \cdot h_q)}$$

Propriedades do diferencial exterior:

(1) $d(\omega + \xi) = d\omega + d\xi$, com ω e ξ formas-k de classe C^1.

(2) $d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^k \omega \wedge d\xi$, com ω forma-k e ξ forma-l de classe C^1.

(3) $d(d\omega) = 0$, com ω forma-k de classe C^2.

(4) $d(f\omega) = f d\omega + df \wedge \omega$, com f forma-0, e ω forma-k, de classe C^1.

Demonstração: (1) É elementar.

(2) Directamente

$$d(\omega \wedge \zeta) = d(\sum_{[\lambda][\mu]} \omega_\lambda \zeta_\mu \, e^\lambda \wedge e^\mu) = \sum_{[\lambda][\mu]} d(\omega_\lambda \zeta_\mu \, e^\lambda \wedge e^\mu)$$

$$= \sum_{[\lambda][\mu]} d(\omega_\lambda \zeta_\mu) \wedge e^\lambda \wedge e^\mu = \sum_{[\lambda][\mu]} [(d\omega_\lambda)\zeta_\mu + \omega_\lambda(d\zeta_\mu)] \wedge e^\lambda \wedge e^\mu$$

$$= \sum_{[\lambda][\mu]} (d\omega_\lambda \wedge e^\lambda) \wedge (\zeta_\mu e^\mu) + (-1)^k (\omega_\lambda e^\lambda) \wedge (d\zeta_\mu \wedge e^\mu) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^k \omega \wedge d\zeta$$

(3) De igual forma

$$d(d\omega) = d(\sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge e^\lambda) = \sum_{[\lambda]} d(\sum_j \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j} \, dx^j \wedge e^\lambda) = \sum_{[\lambda]} \sum_j d(\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j} dx^j \wedge e^\lambda)$$

$$= \sum_{[\lambda]} \sum_j d(\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x^j}) \wedge dx^j \wedge e^\lambda = \sum_{[\lambda]} \sum_j \Big(\sum_k \frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \Big) \wedge dx^j \wedge e^\lambda$$

$$= \sum_{[\lambda]} \Big[\sum_{j<k} \underbrace{\Big(\frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 \omega_\lambda}{\partial x^j \partial x^k} \Big)}_{=0} dx^k \wedge dx^j \Big] \wedge e^\lambda = 0.$$

(4) Exercício.

Dada uma forma-n não nula $\omega = \omega_\lambda e^\lambda$ onde $\lambda = (1, \ldots, n)$ e atendendo à definição de e^λ podemos concluir que sendo $e_1, \ldots, e_n$ a base de V e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ outra base com $\epsilon_j = \sum_i a^i_j e_i$, temos:

$$\omega(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \det\, (a^i_j)\, \omega(e_1, \ldots, e_n).$$

Assim $\omega \in \Omega^n(V)$ separa as bases de V em dois conjuntos: aquelas para as quais $\det\, (a^i_j) > 0$ (tais como $(e_1, \ldots, e_n)$); e aquelas para as quais $\det\, (a^i_j) < 0$. Nesta distinção é muito importante considerar-se a ordem pela qual se tomam os vectores de base. Para salientar este facto designa-se por **referencial** de V uma base ordenada de V.

A separação indicada das bases de V não depende da forma ω considerada, sendo assim natural introduzir-se um conceito de orientação para espaços vectoriais destinado a designar o tipo de referencial a considerar.

Para subespaços vectoriais de V em geral define-se orientação da seguinte forma:

Definição: Sendo $v_1, \ldots, v_k$ uma base de um subespaço vectorial V, chama-se **orientação** deste subespaço ao covector-k definido por:

$$\alpha = \frac{v_1^* \wedge \ldots \wedge v_k^*}{|v_1^* \wedge \ldots \wedge v_k^*|} \ ,$$

(portanto $|\alpha| = 1$).

Nota: Dado $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$ sem repetições e considerando o espaço vectorial de base $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ temos que e^λ é uma sua orientação. Para $k = n$ o espaço $V = \mathbb{R}^n$ tem duas possíveis orientações: $\pm e^{1,\ldots,n}$. Chama-se **positiva** à orientação $e^{1,\ldots,n}$ correspondente ao referencial $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Facilmente se estende a definição de orientação a variedades-k por consideração em cada ponto do respectivo espaço tangente.

Definição: A variedade de classe C^1 k-dimensional M é **orientável** se existe uma função contínua $o : M \to \Omega^k(V)$ tal que para cada $p \in M$, $o(p)$ é uma orientação para o espaço tangente T_pM.

Exercícios: **1.** $k = 1$: Neste caso, em cada ponto p de M o espaço tangente é unidimensional e as duas possíveis tangentes unitárias fornecem-nos duas possíveis orientações para T_pM. Obtem-se uma orientação para M atribuindo a cada $p \in M$ o dual de uma destas tangentes de forma contínua em M.

Nota: Toda a variedade-1 é orientável.

2. $k = n$: Neste caso a variedade M é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $p \in M$ temos que $T_pM = \mathbb{R}^n$ e já vimos que existem duas possíveis orientações para $T_pM : \pm e^{1,\ldots,n}$.

Nota: Como no caso anterior, temos que é sempre possível orientar M tomando-se uma orientação constante $o(p) = \pm e^{1,\ldots,n}$ positiva ou negativa.

3. $k = n - 1$: Este caso reveste-se de interesse especial e vamos considerá-lo com cuidado. Para cada $p \in M$ o espaço tangente T_pM é $(n-1)$-dimensional e sendo $v_1, \ldots, v_{n-1}$ um referencial de T_pM temos as duas possíveis orientações para T_pM:

$$o(p) = \pm \frac{v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{n-1}^*}{|v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{n-1}^*|} \ .$$

Sendo $\alpha = h_1^* \wedge \ldots \wedge h_{n-1}^*$ um covector-$(n-1)$ não nulo define-se o covector adjunto ${}^*\alpha$ como sendo o covector-1 tal que:

(1) ${}^*\alpha$ é normal ao subespaço gerado por $h_1^*, \ldots, h_{n-1}^*$.

(2) $({}^*\alpha, h_1^*, \ldots, h_{n-1}^*)$ é uma orientação positiva para $\mathbb{R}^n$.

(3) $|{}^*\alpha| = |\alpha|$.

Sendo $h_j = \sum_i h_j^i e_i$ podemos escrever

$$\alpha = h_1^* \wedge \ldots \wedge h_{n-1}^* = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} h_1^{i_1} \ldots h_{n-1}^{i_{n-1}} \ e^{i_1,\ldots,i_{n-1}}$$

$$= \sum_{[\lambda_i]} \sum_{\sigma \in \Pi\lambda_i} \text{sgn } \sigma \ (h_1^{\sigma_1} \ldots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}}) \, e^{\lambda_i}$$

e portanto $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i} e^{\lambda_i}$ onde $\lambda_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ e os α_{λ_i} são dados por

$$\alpha_{\lambda_i} = \sum_{\sigma \in \Pi\lambda_i} \text{sgn } \sigma \ (h_1^{\sigma_1} \ldots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}}) \ .$$

Então tomando ${}^*\alpha = \sum_{i=1}^n c_i e^i$ vamos verificar que (1), (2) e (3) são satisfeitos se tomarmos

$$c_i = (-1)^{i-1} \alpha_{\lambda_i} \ .$$

Na verdade temos que para $k = 1, \ldots, n-1$:

$${}^*\alpha \cdot h_k^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_{\lambda_i} h_k^i = \sum_{i=1}^n h_k^i \ (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in \Pi\lambda_i} \text{sgn } \sigma \ (h_1^{\sigma_1} \ldots h_{n-1}^{\sigma_{n-1}})$$

$$= \sum_{\sigma' \in \Pi(1,\ldots,n)} \text{sgn } \sigma' \ (h_k^{\sigma'_1} h_1^{\sigma'_2} \ldots h_{n-1}^{\sigma'_n}) = \det \, [h_k \, h_1 \, \ldots \, h_{n-1}] = 0 \ ,$$

verificando-se (1). Quanto a (2) temos

$${}^*\alpha \wedge \alpha = {}^*\alpha \wedge h_1^* \wedge \ldots \wedge h_{n-1}^* = \sum_{k,[\lambda_i]} c_k \, \alpha_{\lambda_i} \, e^k \wedge e^{\lambda_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\, \alpha_{\lambda_i}\, (-1)^{i-1}\, e^{1,\dots,n} = K\, e^{1,\dots,n}$$

onde $K = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \alpha_{\lambda_i}\, (-1)^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{\lambda_i})^2 = |\alpha|^2 > 0$ e finalmente (3) resulta imediatamente de:

$$|^*\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{n} (c_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{\lambda_i})^2 = |\alpha|^2 \ .$$

Poderia agora verificar-se que qualquer covector-$(n-1)$ se pode representar na forma de um produto de $n-1$ covectores-1:

$$\alpha = h_1^* \wedge \ldots \wedge h_{n-1}^* \ .$$

Nota: Sendo α e ω covectores-$(n-1)$ temos a seguinte relação

$$^*\omega \cdot {}^*\alpha \ = \ \omega \cdot \alpha \ .$$

Retomando o exemplo, para $k = n-1$ temos que o vector ν tal que $\nu^*(p) = {}^*o(p)$ é uma normal unitária a M em p. Então M será orientável se a normal unitária a M em p pode ser escolhida continuamente em M.

Definição: Sendo D um domínio regular em $\mathbb{R}^n$, a normal exterior unitária define uma orientação para $M = \partial D$ designando-se por orientação positiva de M.

Nota: Em $\mathbb{R}^3$ facilmente se verifica a relação $(v_1 \times v_2)^* = {}^*(v_1^* \wedge v_2^*)$ para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

4. Consideramos agora o caso geral de uma vizinhança de coordenadas para uma variedade M de dimensão k. Sendo $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos abertos, $U \cap M$ uma vizinhança de coordenadas de M e $g : V \to U \cap M$ uma representação paramétrica de $U \cap M$, para cada $p \in U \cap M$ temos que $D_1 g(t), \ldots, D_k g(t)$ com $t = g^{-1}(p)$ formam uma base do espaço T_pM. Assim, podemos definir a seguinte orientação para $U \cap M$:

$$o(p) = \frac{D_1 g^*(t) \wedge \ldots \wedge D_k g^*(t)}{|D_1 g^*(t) \wedge \ldots \wedge D_k g^*(t)|} \ .$$

Esta orientação diz-se induzida em $U \cap M$ por g a partir da orientação positiva em V.

Podemos finalmente definir integral de formas diferenciais sobre variedades. Naturalmente, o integral deverá depender da orientação atribuida à variedade, mudando de sinal caso a orientação seja invertida.

Definição: Sendo M uma variedade-k com orientação o, $A \subset M$ um subconjunto k-mensurável e ω uma forma diferencial de ordem k contínua em M, define-se o integral de ω sobre A com orientação o por:

$$\int_{A^o} \omega = \int_A (\omega \cdot o)$$

sempre que $\omega \cdot o$ seja integrável em A.

Notas: Relembra-se aqui que:

(1) A é k-mensurável se e só se $A = g(B)$ com B mensurável, e então :

$$v_k(A) = \int_B V_k(D_1 g, \ldots, D_k g) < \infty$$

(2) Então, sendo $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$ contínua tem-se:

$$\int_A f = \int_A f \, dv_k = \int_B (f \circ g)\, V_k(D_1 g, \ldots, D_k g) \ .$$

Aplicações: No caso particular de ser $k = 1$ obtem-se o integral de linha em $\mathbb{R}^n$ de um campo vectorial. Designando por C^o uma variedade-1 (curva) em $\mathbb{R}^n$ de orientação o induzida por uma representação paramétrica g a partir da orientação positiva para o intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $C = g(I)$, e sendo $\omega = \sum_i f_i \, dx^i$ uma forma-1 contínua em C temos:

$$\int_{C^o} \omega = \int_C \omega \cdot o = \int_C f \cdot \tau = \int_I (f \circ g) \cdot \frac{D_1 g}{|D_1 g|} \, V_1(D_1 g)$$

$$= \int_I (f \circ g) \cdot D_1 g = \int_I \sum_i (f_i \circ g) \frac{dg^i}{dt} = \int_C f \cdot dg$$

onde o vector τ definido por $\tau^*(p) = o(p)$ é o vector unitário tangente a C em p.

Ainda como caso particular obtem-se o integral em $\mathbb{R}^n$ de uma função escalar fazendo $k = n$. Designando por A^+ o conjunto A com orientação positiva $e^{1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$ e tomando $\omega = f \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ temos $\omega \cdot e^{1,\ldots,n} = f$ e portanto:

$$\int_{A^+} \omega = \int_A f = \int_A f(x)\, dv_n(x) \ .$$

Estudando o caso $k = n-1$, podemos reescrever o teorema da divergência para formas diferenciais.

Teorema da Divergência: Seja D^+ um domínio regular em $\mathbb{R}^n$ com orientação positiva, ∂D^+ a fronteira de D positivamente orientada e ω uma forma-(n-1) de classe C^1 em $\bar{D}$. Então:

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{\partial D^+} \omega.$$

Demonstração: Usando a definição e designando por o a orientação positiva de ∂D temos

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{\partial D} \omega \cdot o = \int_{\partial D} {}^*\omega \cdot {}^*o = \int_{\partial D} \zeta \cdot \nu$$

onde se tomou $\zeta = {}^*\omega$. Por outro lado, sendo $\omega = \sum_i \omega_{\lambda_i} e^{\lambda_i}$ uma forma-$(n-1)$ temos que a forma-n $d\omega$ é dada por:

$$d\omega = \sum_i d\omega_{\lambda_i} \wedge e^{\lambda_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^i} e^j \wedge e^{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{\lambda_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\lambda_i}}{\partial x^i} (-1)^{i-1} e^{1,\ldots,n} = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^i}) e^{1,\ldots,n} = (\text{div } \zeta)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Portanto, temos

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{D^+} (\text{div } \zeta) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_D \text{div } \zeta$$

e o teorema da divergência na forma conhecida dá-nos o resultado.

No caso geral de considerarmos variedades-k cuja fronteira relativa é uma variedade-$(k-1)$ e formas da mesma ordem, obtemos uma expressão análoga, conhecida por fórmula de Stokes, contendo em si como casos particulares as formas clássicas dos teoremas de Green, Stokes e Gauss. Antes de iniciar o seu estudo vamos considerar o comportamento das formas diferenciais com as mudanças de coordenadas.

Seja ω uma forma-k, com $k \geq 1$, definida num subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \to D$ uma transformação de classe C^1 definida no subconjunto aberto $B \subset \mathbb{R}^m$. Então, define-se em B uma forma-k $\omega_g^\sharp$ por transporte da forma ω por g (*pull back* na literatura anglo-saxónica).

Definição: Para todo $t \in B$ temos $\omega_g^\sharp(t) = L^*\omega(x)$ onde $x = g(t)$ e $L = Dg(t)$.

Nota: Pode naturalmente definir-se a mesma operação para formas-0 fazendo $f_g^\sharp = f \circ g$.

Com base nesta definição podemos estabelecer uma fórmula de cálculo de $\omega_g^\sharp$. Dados $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ e tomando $\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda e^\lambda$ temos:

$$\omega_g^\sharp(t)\,(v_1, \ldots, v_k) = L^*\omega(x)\,(v_1, \ldots, v_k)$$

$$= \omega(x)\,(Lv_1, \ldots, Lv_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(x)\, e^\lambda\,(Lv_1, \ldots, Lv_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(x) \det\,[L^{i_p} \cdot v_q]$$

com $\lambda = (i_1, \ldots, i_k)$. Mas, atendendo a que $L = Dg(t) = [\frac{\partial g^i}{\partial x^j}(t)]$, temos que a linha i da matriz L é constituída pelos coeficientes da forma-1 dg^i e portanto:

$$\omega_g^\sharp(t)\,(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda(g(t))\, dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}\,(v_1, \ldots, v_k)\ .$$

Conclui-se assim que a lei de transformação para formas diferenciais se obtem formalmente substituindo x por $g(t)$ e dx^i por $dg^i(t)$:

$$\omega = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \ \longleftrightarrow\ \omega_g^\sharp = \sum_{[\lambda]} \omega_\lambda \circ g\ \ dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}$$

Facilmente se demonstram as seguintes propriedades para esta lei de transformação:

(a) $\quad (\omega + \zeta)_g^\sharp = \omega_g^\sharp + \zeta_g^\sharp$,

(b) $\quad (\omega \wedge \zeta)_g^\sharp = \omega_g^\sharp \wedge \zeta_g^\sharp$.

A propriedade mais importante é no entanto a **invariância** da derivação exterior:

Proposição: Sendo ω uma forma-k de classe C^1 definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \to D$ uma transformação de classe C^2 definida no subconjunto aberto $B \subset \mathbb{R}^m$, temos que:

$$(d\omega)_g^\sharp = d(\omega_g^\sharp)\ .$$

Demonstração: No caso especial de formas-0, temos:

$$(df)^\sharp_g = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i\Big)^\sharp_g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \;\; dg^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ g \frac{\partial g^i}{\partial t^j} \Big)\, dt^j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} (f \circ g) dt^j = d(f \circ g) = d(f^\sharp_g) \; .$$

Para $k \geq 1$ temos então:

$$d(\omega^\sharp_g) = d\Big(\sum_{[\lambda]} (\omega_\lambda \circ g)\, dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k} \Big) = \sum_{[\lambda]} d[(\omega_\lambda \circ g)\, dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}]$$

$$= \sum_{[\lambda]} d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k} + (\omega_\lambda \circ g)\, d(dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}) \; .$$

Mas sendo g de classe C^2 temos

$$d(dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge d(dg^{i_l}) \wedge \ldots \wedge dg^{i_k} = 0$$

e portanto:

$$d(\omega^\sharp_g) = \sum_{[\lambda]} d(\omega_\lambda \circ g) \wedge dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k} = \sum_{[\lambda]} d(\omega^\sharp_{\lambda g}) \wedge dg^{i_1} \wedge \ldots \wedge dg^{i_k}$$

$$= \sum_{[\lambda]} (d\omega_\lambda)^\sharp_g \wedge (dx^{i_1})^\sharp_g \wedge \ldots \wedge (dx^{i_k})^\sharp_g = \sum_{[\lambda]} (d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})^\sharp_g$$

$$= \Big[\sum_{[\lambda]} d\omega_\lambda \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \Big]^\sharp_g = (d\omega)^\sharp_g \; .$$

Com esta lei de transformação é possível calcular os integrais de formas diferenciais sobre variedades utilizando as representações paramétricas:

Proposição: Dada uma variedade-k M, e sendo A um subconjunto de uma vizinhança de coordenadas $S \subset M$ admitindo uma representação paramétrica $g : V \to S$ com $V \subset \mathbb{R}^k$ aberto, e sendo o a orientação em S induzida por g pela orientação positiva de V, temos:

$$\int_{A^o} \omega = \int_{B^+} \omega^\sharp_g$$

onde $A = g(B)$.

Demonstração:

$$\int_{A^o} \omega = \int_A \omega \cdot o = \int_B (\omega \circ g) \cdot \frac{D_1 g^* \wedge \ldots \wedge D_k g^*}{|D_1 g^* \wedge \ldots \wedge D_k g^*|} V_k(D_1 g, \ldots, D_k g)$$

$$= \int_B (\omega \circ g) \cdot D_1 g^* \wedge \ldots \wedge D_k g^* = \int_B (\omega \circ g)(D_1 g, \ldots, D_k g)$$

$$= \int_B (\omega \circ g)(Le_1, \ldots, Le_k) = \int_B L^* \omega \circ g \ \ (e_1, \ldots, e_k) = \int_B \omega_g^\sharp \cdot e^{1,\ldots,k} = \int_{B^+} \omega_g^\sharp \ .$$

É necessário igualmente considerar subvariedades, utilizando a sua representação paramétrica, sendo agora necessário prestar maior atenção às respectivas orientações. Seja M uma variedade-k, e $S \subset M$ uma vizinhança de coordenadas com representação paramétrica $g : V \to S$, $V \subset \mathbb{R}^k$. Dada uma subvariedade m-dimensional $P \subset V$ de orientação α definida por $\alpha(p) = u_1^*(p) \wedge \ldots \wedge u_m^*(p)$, o conjunto $Q = g(P)$ é uma subvariedade-m de S de orientação β que se diz induzida por g a partir da orientação α em P se β fôr dada por

$$\beta(x) = \frac{Lu_1^*(p) \wedge \ldots \wedge Lu_m^*(p)}{|Lu_1^*(p) \wedge \ldots \wedge Lu_m^*(p)|}$$

com $x = g(p)$ e $L = Dg(p)$, $p \in P$. Obtemos então a seguinte:

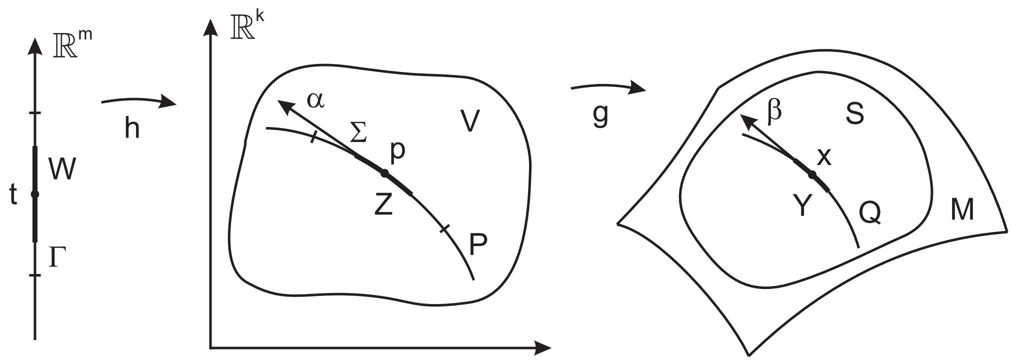
Proposição: Sendo $Y = g(Z)$ um subconjunto m-mensurável de Q e ω uma forma-m definida em Q temos que

$$\int_{Y^\beta} \omega = \int_{Z^\alpha} \omega_g^\sharp$$

sempre que um dos integrais exista.

Demonstração: Considera-se primeiro o caso em que existe uma vizinhança de coordenadas Σ contendo $Z = g^{-1}(Y)$ com representação paramétrica $h : \Gamma \to \Sigma$ onde Γ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Então, sendo $f = g \circ h$ temos que $f : \Gamma \to g(\Sigma)$ é uma representação paramétrica para uma vizinhança de coordenadas contendo Y. Sendo α a orientação em Σ induzida por h a partir da orientação positiva (negativa) em $\mathbb{R}^m$, facilmente se verifica que β é a orientação em $g(\Sigma)$ induzida por f a partir da orientação positiva (negativa) em $\mathbb{R}^m$. Supondo então $\mathbb{R}^m$ positivamente orientado, e sendo $W = h^{-1}(Z) = f^{-1}(Y)$ o subconjunto mensurável de $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, temos:

$$\int_{Y^\beta} \omega = \int_{W^+} \omega_f^\sharp = \int_{W^+} (\omega_g^\sharp)_h^\sharp = \int_{Z^\alpha} \omega_g^\sharp \ .$$



Para obter o caso geral recorre-se ao uso de uma partição de unidade da forma habitual.

Podemos agora apresentar a fórmula de Stokes. Para tanto, consideramos a seguinte definição. Sendo M uma variedade-k de classe C^2 orientável, e $A \subset M$ um subconjunto relativamente aberto, isto é, existe um aberto U tal que $A = U \cap M$, A diz-se um **domínio regular** em M se:

(1) $\bar{A}$ é compacto;

(2) ∂A, a fronteira relativa de A em M, é uma variedade-$(k-1)$ de classe C^2;

(3) A é o interior relativo de $\bar{A}$ em M.

Temos finalmente o celebrado

Teorema de Stokes: Sendo M uma variedade-k de classe C^2 e de orientação o, $A \subset M$ um domínio regular em M e ω uma forma-$(k-1)$ de classe C^1 em $\bar{A}$, temos:

$$\int_{A^o} d\omega = \int_{\partial A^o} \omega \ ,$$

onde ∂A^o designa a variedade-$(k-1)$ ∂A com a orientação induzida a partir da orientação o.

Demonstração: Tal como anteriormente, supomos inicialmente que $\bar{A}$ está contido numa vizinhança de coordenadas $U \cap M$ com representação paramétrica $g : S \to U \cap M$ onde S é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^k$. Então tomando $B = g^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^k$ que podemos assumir com orientação positiva,

temos:
$$\int_{\partial A^o} \omega = \int_{\partial B^+} \omega_g^\sharp = \int_{B^+} d(\omega_g^\sharp) = \int_{B^+} (d\omega)_g^\sharp = \int_{A^o} d\omega \ .$$

Finalmente, para o caso geral recorre-se a uma partição de unidade.

Exemplos: Vamos seguidamente ver casos particulares do teorema de Stokes, elucidando a associação feita anteriormente entre vários operadores diferenciais e a derivação exterior.

(1) $[n = 3, k = 3]$ Seja D um domínio regular em $\mathbb{R}^3$ e ∂D a fronteira com orientação o induzida a partir da orientação positiva para $\mathbb{R}^3$. Então, sendo:

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

uma forma-2 de classe C^2 temos:

$$d\omega = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}\Big)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

e tomando $\xi = {}^*\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ obtemos as relações:

$$\int_{D^+} d\omega = \int_{D^+} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\, dx \wedge dy \wedge dz = \int_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)$$

$$\int_{\partial D^o} \omega = \int_{\partial D} \omega \cdot o = \int_{\partial D} \zeta \cdot \nu \ .$$

Considerando o campo vectorial $f = (P, Q, R)$ da forma-1 ζ, e transformando o produto escalar num produto vectorial, obtem-se do teorema de Stokes a forma clássica do teorema de Gauss:

$$\int_D \mathrm{div}\ f = \int_{\partial D} f \cdot \nu$$

(2) $[n = 3, k = 2]$ Seja agora M uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$, A um domínio regular em M com orientação o induzida a partir da orientação positiva de $\mathbb{R}^3$ e ω a forma-1 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Então,temos:

$$d\omega = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\, dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\, dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy \ .$$

Considerando o campo vectorial $f = (P, Q, R)$ dual de ω e tomando $\zeta = {}^*d\omega$, o dual de ζ designa-se por rot f. Então, sendo ∂A^o a variedade-1 ∂A

com a orientação induzida a partir de o e r uma parametrização de ∂A correspondente a esta orientação obtemos as relações:

$$\int_{A^o} d\omega = \int_A d\omega \cdot o = \int_A \zeta \cdot \nu = \int_A \text{rot } f \cdot \nu$$

$$\int_{\partial A^o} \omega = \int_{\partial A} d\omega \cdot o = \int_{\partial A} f \cdot o = \oint_{\partial A} f \cdot dr$$

onde se transformou o produto escalar em vectorial. Obtemos, assim, a forma clássica do teorema de Stokes:

$$\int_A \text{rot } f \cdot \nu = \oint_{\partial A} f \cdot dr$$

Nota: É também habitual a seguinte notação para o integral de linha

$$\int_{\partial A^o} \omega = \oint_{\partial A} \omega = \oint_{\partial A} Pdx + Qdy + Rdz.$$

(3) $[n = 3, k = 1]$ Seja C uma variedade-1 de $\mathbb{R}^3$ com uma representação paramétrica $r : I \to \mathbb{R}^3$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, e orientação o induzida por r a partir da orientação positiva de $\mathbb{R}$. Seja também $\omega = g$ uma forma-0 em $\mathbb{R}^3$. Então

$$d\omega = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz$$

e o vector dual designa-se por ∇g. Assim, tomando $\partial C = \{A, B\}$ onde $A = r(a)$, $B = r(b)$, como anteriormente, temos:

$$\int_{C^o} d\omega = \int_C d\omega \cdot o = \int_C \nabla g \cdot o = \int_C \nabla g \cdot dr$$

$$\int_{\partial C^o} \omega = g(B) - g(A)$$

obtendo-se o conhecido resultado, generalização do teorema fundamental do cálculo para integrais de linha:

$$\int_C \nabla g \cdot dr = g(B) - g(A)\ .$$

(4) $[n = 2, k = 2]$ Neste caso, seja A uma região regular de $\mathbb{R}^2$ positivamente orientada e ∂A^+ a sua fronteira positivamente orientada. Então, dada a forma-1 $\omega = Pdx + Qdy$, temos $d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx \wedge dy$ e portanto:

$$\int_{A^+} d\omega = \int_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

$$\int_{\partial A^+} \omega = \oint_{\partial A} Pdx + Qdx.$$

Assim, do teorema de Stokes obtem-se o teorema de Green no plano:

$$\int_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = \oint_{\partial A} Pdx + Qdy \ .$$

5. Formas Fechadas e Formas Exactas

Definição: Uma forma-k ω de classe C^1 diz-se **fechada** se $d\omega = 0$. Uma forma-k ω diz-se **exacta** se existe uma forma-$(k-1)$ ζ de classe C^1 tal que $\omega = d\zeta$.

Vimos anteriormente que sendo ω exacta, $\omega = d\zeta$ com ζ de classe C^2 então ω é fechada, $d\omega = 0$. Apresentamos agora uma recíproca parcial dada pelo Lema de Poincaré.

Vamos inicialmente introduzir um novo operador sobre as formas diferenciais que contráriamente ao operador d estudado transforma formas-k em formas-$(k-1)$. Seja η uma forma-k de classe C^1 definida em $I \times S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $I = [0,1]$ e $S \subset \mathbb{R}^n$. Designaremos as coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$. Continuaremos a designar por λ qualquer permutação dos símbolos $(1, \ldots, n)$ e passaremos a designar por Λ as permutações de $(0, 1, \ldots, n)$.

Então a forma η pode decompôr-se na soma de duas formas ψ e ξ da seguinte maneira:

$$\eta = \sum_{[\Lambda]} \eta_\Lambda e^\Lambda = \sum_{[\lambda_0]} \eta_{\lambda_0} e^0 \wedge e^{\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} \eta_{\Lambda_0} e^{\Lambda_0} = \psi + \xi \ .$$

Dada esta decomposição podemos definir um operador que designamos por $\int_0^1$ transformando a forma-k η numa forma-$(k-1)$ $\int_0^1 \eta$:

Definição: Dada a forma-k η define-se $\int_0^1 \eta$ como a forma-$(k-1)$ representada por:

$$\int_0^1 \eta = \sum_{[\lambda_0]} (\int_0^1 \eta_{\lambda_0} dx^0) e^{\lambda_0} \ .$$

Temos assim que $\int_0^1$ é linear e $\int_0^1 \eta = \int_0^1 \psi$ enquanto que $\int_0^1 \xi = 0$, e da aplicação sucessiva dos operadores $\int_0^1$ e d obtem-se o seguinte:

Lema: Dada uma forma-k η de classe C^1 com a decomposição indicada, temos:

$$\int_0^1 d\eta + d\int_0^1 \eta = \xi(1) - \xi(0).$$

Demonstração:

$$\int_0^1 d\eta = \int_0^1 d\psi + d\xi = \int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} d\eta_{\lambda_0} \wedge e^{0,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} d\eta_{\Lambda_0} \wedge e^{\Lambda_0}$$

$$= \int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{0,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^i} e^i \wedge e^{\Lambda_0}$$

$$= -\int_0^1 \sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} e^0 \wedge e^{i,\lambda_0} + \int_0^1 \sum_{[\Lambda_0]} \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^0} e^0 \wedge e^{\Lambda_0}$$

$$= -\sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 \frac{\partial \eta_{\lambda_0}}{\partial x^i} dx^0 \Big)\, e^{i,\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} \Big(\int_0^1 \frac{\partial \eta_{\Lambda_0}}{\partial x^0} dx^0 \Big)\, e^{\Lambda_0}$$

$$= -\sum_{[\lambda_0]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\int_0^1 \eta_{\lambda_0}\, dx^0 \Big)\, e^i \wedge e^{\lambda_0} + \sum_{[\Lambda_0]} [\eta_{\Lambda_0}(1) - \eta_{\Lambda_0}(0)]\, e^{\Lambda_0}$$

$$= -\sum_{[\lambda_0]} d\Big(\int_0^1 \eta_{\lambda_0}\, dx^0 \Big) \wedge e^{\lambda_0} + \xi(1) - \xi(0) = -d\Big[\sum_{[\lambda_0]} (\int_0^1 \eta_{\lambda_0}\, dx^0)\, e^{\lambda_0} \Big] + \xi(1) - \xi(0)$$

$$= -d\int_0^1 \eta + \xi(1) - \xi(0)\ .$$

Necessitamos em seguida da seguinte:

Definição: Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **em estrela** se existe $a \in S$ tal que para todo $x \in S$ o segmento de recta que une x a a está contido em S.

Podemos agora apresentar o seguinte:

Teorema: (Lema de Poincaré) Seja S um conjunto em estrela e $1 \leq k \leq n$. Então, toda a forma-k de classe C^1 **fechada** em S é **exacta**.

Demonstração: Sendo $a \in S$ um ponto em relação ao qual S é em estrela, podemos definir a seguinte transformação $h : I \times S \to S$, $I = [0, 1]$

$$h(x^0, x) = a + x^0(x - a)\ .$$

Esta transformação diz-se uma **homotopia** e simplesmente contrai o conjunto S linearmente até ao ponto a, no sentido em que $h(1, S) = S$ e $h(0, S) = a$.

Sendo ω uma forma-k de classe C^1 em S, temos que $\eta = \omega_h^\sharp$ é uma forma-k de classe C^1 em $I \times S$, cuja decomposição é $\eta = \xi$, $\psi = 0$. Então, pelo lema anterior temos:

$$\int_0^1 d(\omega_h^\sharp) + d\int_0^1 \omega_h^\sharp = \omega_h^\sharp(1) - \omega_h^\sharp(0) \ .$$

Mas $\omega_h^\sharp(1) = \omega$, $\omega_h^\sharp(0) = 0$, e sendo ω fechada $d(\omega_g^\sharp) = (d\omega)_g^\sharp = 0$. Fazendo $\zeta = \int_0^1 \omega_h^\sharp$ temos finalmente que $\omega = d\zeta$ e ω é exacta.

O Lema de Poincaré estabelece apenas uma condição suficiente S para que toda a forma-k fechada seja exacta. Uma condição necessária e suficiente foi estabelecida por de Rham.

Seja $D^k(M)$ o conjunto das formas diferenciais de ordem k de classe C^∞ definidas sobre a variedade m-dimensional M. O conjunto $D^k(M)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e tem-se $D^k(M) = \{0\}$ se $k > m$. Seja $Z^k(M) \subset D^k(M)$ o subconjunto das formas fechadas, e $B^k(M) \subset D^k(M)$ o subconjunto das formas exactas. Facilmente se verifica que $Z^k(M)$ e $B^k(M)$ também são espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$ e como toda a forma exacta é fechada tem-se $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Então, define-se o espaço vectorial $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ identificando os elementos de $Z^k(M)$ que diferem de uma forma exacta (a classe residual de $Z^k(M)$ com respeito ao subespaço $B^k(M)$). Os elementos de $H^k(M)$ são classes de equivalência de formas-k fechadas, e $\omega, \omega' \in Z^k(M)$ pertencem à mesma classe de equivalência se $\omega - \omega' \in B^k(M)$. O espaço $H^k(M)$ é o **grupo de cohomologia** k de de Rham e depende essencialmente da topologia da variedade M. À dimensão d_k do espaço $H^k(M)$ chama-se **número de Betti** de ordem k da variedade M.

Exemplos: (1) Sendo $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto **simplesmente conexo** então toda a forma-1 em D fechada é exacta, e portanto $H^1(D) = \{0\}$.

(2) Sendo p o número de componentes conexas de M tem-se que $H^0(M)$ é um espaço vectorial de dimensão p. Na verdade, como $B^0(M) = \{0\}$ tem-se que $H^0(M) = Z^0(M)$ e sendo f uma função de classe C^∞ definida em M

tal que $df = 0$ (uma forma-0 fechada) tem-se que f é constante em cada componente M_j, $j = 1, \ldots, p$, de M.

Tomando as funções f_j, $j = 1, \ldots, p$, iguais a 1 em M_j e 0 nas outras componentes de M, tem-se que $\{f_1, \ldots, f_p\}$ forma uma base de $Z^0(M)$.

(3) Do Lema de Poincaré conclui-se que

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\} \ , \ \ k > 0 \ .$$

O teorema de de Rham afirma que toda a forma-k em M fechada é exacta se e só se $H^k(M) = \{0\}$.

6. Exemplos de Aplicação: Campo Electromagnético Relativista

Temos vindo a considerar como espaço de base o espaço euclideano V identificado com $\mathbb{R}^n$ e vimos recentemente alguns exemplos de aplicação das formas diferenciais à Mecânica Clássica, tomando $n = 3$. Em Física é natural privilegiar as transformações de coordenadas (mudanças de referencial) que preservam as normas. Assim, na Mecânica Clássica é natural considerarem-se no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ as transformações galileanas da forma $x = Qx' + vt'$, $t = t'$ onde Q é uma transformação ortogonal (rotação).

Na Relatividade Restrita considera-se o espaço-tempo pseudo-euclideano V identificado com $\mathbb{R}^4$, de componentes (x^1, x^2, x^3, x^4), com $x^4 = ct$ sendo c a velocidade da luz, e de "norma"$\| \ \|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 - c^2 t^2$, identificando-se o instante presente com um cone de luz. As transformações que preservam esta "norma"são as transformações de Lorentz.

Utilizando variáveis complexas pode-se identificar V com um espaço euclideano $\widetilde{V}$ de componentes (x^1, x^2, x^3, ix^4), passando as transformações unitárias em $\widetilde{V}$ a representar simples rotações. No caso de ser usada apenas a coordenada de espaço $x = x^1$, podemos identificar o ângulo de rotação com $\operatorname{tg} \psi = i\frac{x}{ct} = i\frac{v}{c}$. Assim, neste caso particular, a transformação de Lorentz será dada por:

$$x = x' \cos \psi - i\, ct' \operatorname{sen} \psi = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{x'}{ic} \,\text{sen}\; \psi + t' \cos\, \psi = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \;.$$

A título de exemplo podemos deduzir a lei de composição das velocidades. Sendo $\psi = \psi_1 + \psi_2$ a aplicação de duas rotações sucessivas, temos:

$$\text{tg}\; (\psi_1 + \psi_2) = \frac{\text{tg}\; \psi_1 + \text{tg}\; \psi_2}{1 - \text{tg}\; \psi_1 \,\text{tg}\; \psi_2} \;,$$

e portanto:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \;.$$

A forma mais simples de se considerar o campo electromagnético na relatividade especial é estabelecer como ponto de partida a existência de uma forma-1 Π (o quadrivector potencial) que, quando integrado sobre uma variedade-1, nos dá o trabalho executado pelo campo Electromagnético no eventual deslocamento de uma carga ao longo desta variedade. Designando por (x^1, x^2, x^3, x^4) as coordenadas de $V(x^4 = ct)$ temos:

$$\Pi = \sum_i A_i dx^i + V dx^4$$

onde os somatórios apenas abrangem $i = 1, 2, 3$.

Então o campo electromagnético obtem-se a partir da forma-2:

$$\Phi = d\Pi = \Big(\sum_i E_i\, e^i\Big) \wedge e^4 + \sum_i B_i\, e^{\lambda_i}$$

onde λ_i designa uma permutação de $(1, 2, 3)$. A expressão anterior corresponde em notação clássica a

$$E = \text{grad}\; V - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$B = \text{rot}\; A \;.$$

Em consequência, sendo Φ exacta, também é fechada:

$$d\Phi = 0 \;,$$

obtendo-se assim o primeiro conjunto das equações de Maxwell:

$$\text{rot}\; E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } B = 0 \ .$$

Por outro lado, começando por tomar como ponto de partida a existência de uma forma-3, o campo relativista de cargas e correntes Ψ, que quando integrado em volumes-3 adequados, nos dão as cargas e as correntes eléctricas

$$\Psi = \sum_i \frac{J_i}{c} \, e^{\lambda_i} \wedge e^4 - q \, e^{123} \ .$$

A equação de continuidade é equivalente à equação:

$$d\Psi = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } J = 0.$$

Sendo Ψ uma forma fechada, e considerando uma região do espaço simplesmente conexa temos pelo lema de Poincaré que Ψ é exacta:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \, d\Gamma$$

onde Γ é uma forma-2 representando o potencial relativista associado às carga e correntes:

$$\Gamma = \sum_i H_i \, e^i \wedge e^4 - \sum_i D_i \, e^{\lambda_i}$$

obtendo-se assim o segundo conjunto das equações de Maxwell

$$\text{rot } H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J$$

$$\text{div } D = 4\pi q \ .$$

Finalmente, uma relação entre estas duas formas-2 designa-se naturalmente por relação de constituição do meio:

$$\Gamma = K(\Phi) \ .$$

7. Bibliografia

J. CAMPOS FERREIRA - Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1987.

W. FLEMING - Functions of Several Variables, Springer-Verlag, 1977.

L. MAGALHÃES - Complementos de Cálculo Diferencial,1991.

L. MAGALHÃES - Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada, Texto Editora, 1989.

M. SPIVAK - Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin, Inc., 1965.