

# A estrutura de Morse da equação de calor

Carlos Rocha

## Introdução

Estas notas têm como objectivo a apresentação dos resultados principais sobre a estrutura de Morse-Smale dos sistemas gerados por equações escalares semilineares parabólicas. Pretende-se que esta apresentação seja o mais possível autocontida e, para evitar complexidades não essenciais, a discussão é conduzida no caso mais simples e paradigmático do problema de Chafee-Infante. Em particular considera-se este problema no caso de condições de fronteira separadas de tipo Neumann.

Seja então a seguinte família de equações semilineares parabólicas a um parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \lambda u - u^3, \quad 0 < x < \pi \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (PCI)$$

Para os diferentes valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  vamos considerar soluções do problema de valores iniciais (PCI) com condições iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 < x < \pi.$$

dadas no espaço de fase adequado.

Naturalmente, a discussão que se segue centra-se na descrição qualitativa das soluções deste problema, encarado como um sistema dinâmico de dimensão infinita, para os vários valores do parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em particular, formula-se (PCI) como uma equação diferencial abstracta e discute-se o comportamento das suas soluções sob o ponto de vista dinâmico.

## Formulação nos espaços de energia

Associado a este problema considera-se o operador linear fortemente elíptico  $A : D(A) \rightarrow X_0$  definido por:

$$Au = -u_{xx} + \varepsilon u, \quad \varepsilon > 0.$$

De um certo ponto de vista, a forma natural de se colocar o problema é procurar soluções em  $L^2$  aproveitando a estrutura de Hilbert deste espaço.

Assim, toma-se para espaço de partida  $X_0 = L^2$  e considera-se  $D(A) = H^2$ :

$$A : D(A) = H^2 \rightarrow L^2 = X_0 .$$

A forma bilinear associada ao operador  $A$  é dada por

$$B[u, v] = \int_0^\pi u_x v_x + \varepsilon uv \quad , \quad u, v \in H^1 .$$

Então

$$B[u, v] \geq \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 .$$

Segue-se por aplicação do teorema de Lax-Milgram que o problema

$$Au = g \quad , \quad g \in L^2$$

tem uma solução fraca única  $u \in H^1$ , isto é, existe um único  $u \in H^1$  que satisfaz a igualdade

$$B[u, v] = (g, v) \quad , \quad v \in H^1$$

para todo o  $v \in H^1$ , onde  $(\cdot, \cdot)$  designa o produto interno em  $L^2$ .

Da mesma forma, a equação linear parabólica

$$u_t + Au = g$$

por consideração de aproximações de Galerkin mostra-se que possui uma solução fraca única, isto é, dados  $g, u \in L^2$  existe um  $\tau > 0$  e um único  $u \in L^2(0, \tau; H^1)$  com  $u' \in L^2(0, \tau; H^{-1})$  tal que

$$(u', v) + B[u, v] = (g, v) \quad , \quad q.t.p.(0, \tau) \quad , \quad v \in H^1$$

para todo o  $v \in H^1$ , e satisfazendo a condição inicial

$$u(0) = u_0 .$$

Este tipo de problemas tem a propriedade de regularizar instantaneamente as soluções. Em particular, se se considerarem os dados iniciais em espaços com alguma regularidade, obtêm-se soluções com a regularidade adequada. Se por exemplo, se considerar  $u_0 \in H^1$ , então

$$u \in L^2(0, \tau; H^2) \cap L^\infty(0, \tau; H^1) .$$

Como

$$\begin{aligned}(Au, v) &= (u, Av) \quad , \quad u, v \in H^2 \\ (Au, u) &= \|u\|_{H^1}^2 \geq 0 \quad , \quad u \in H^1\end{aligned}$$

pelo teorema de Friedrich,  $A$  possui uma extensão como operador linear autoadjunto definido num domínio denso em  $X_0 = L^2$

$$D(A) = \{u \in L^2 : Au \in L^2\} = H^2 .$$

Assim,  $\sigma(A)$  é real e  $A$  possui uma inversa linear limitada e compacta. Os valores próprios de  $A$  satisfazem

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$$

com uma base ortogonal de  $L^2$  constituída por funções próprias  $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ :

$$\sigma(A) = \{\lambda_k = \varepsilon + k^2\} \quad , \quad w_k(x) = \cos kx \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Conclui-se que  $A$  é um operador sectorial. Logo  $-A$  gera um semigrupo linear  $e^{-At}, t > 0$  fortemente contínuo em  $H^1 = D(A^{1/2}) = X_0^{1/2}$ . De facto  $e^{-At}$  é compacto para  $t > 0$ .

Tomando então para espaço de estados

$$X = X_0^{1/2} = H^1 \subset C^0$$

obtem-se que as soluções fracas anteriormente definidas são efectivamente soluções clássicas para  $t > 0$ .

O problema não-linear, considerado na forma

$$\begin{aligned}u_t + Au &= f(\lambda, u) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \quad ,\end{aligned}$$

com  $u_0 \in D(A)$  e  $f$  satisfazendo uma condição de Lipschitz em  $u$ , tem uma solução única dada por

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(\lambda, u(s)) ds$$

gerando em  $X$  um semigrupo (local) não-linear  $u(t) = T(t)u_0, t > 0$ .

### Comportamento gradiente

Este semigrupo possui um funcional de Liapunov  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(u) = \int_0^\pi \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 .$$

De facto,

$$\frac{d}{dt} V(u) = - \int_0^\pi u_t^2 \leq 0$$

e o semigrupo não-linear  $T(t), t > 0$  gerado por (PCI) é de tipo gradiente. Como, além disso, facilmente se conclui que  $V$  é limitado inferiormente,  $V(u) \geq c_0$  com  $c_0 = -\pi M^2/4$ ,  $M = \max 0, \lambda$ , qualquer que seja  $u \in X$ , e satisfaz ainda  $V(u) \nearrow +\infty$  quando  $\|u\| \nearrow +\infty$  conclui-se que as soluções de (PCI) são globais para  $t \geq 0$ .

Segue-se que  $\omega(u_0) \in E$ , onde  $E$  designa o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema, isto é, o conjunto das soluções do problema de valores na fronteira

$$\begin{aligned} v_{xx} + \lambda v - v^3 &= 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \\ v_x(0) &= v_x(\pi) = 0 . \end{aligned} \quad (PVF)$$

Qualquer que seja o valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a solução trivial  $u \equiv 0$  é uma solução de equilíbrio.

Dada uma solução global limitada

$$u(t) = T(t)u_0 \quad , \quad -\infty < t < +\infty$$

existem equilíbrios  $e^\pm \in E$  tais que

$$\omega(u_0) = e^+ \quad , \quad \alpha(u_0) = e^-$$

### Diagrama de bifurcação

Para estudar as soluções de equilíbrio de (PCI) considera-se o problema de valores iniciais associado ao (PVF)

$$\begin{aligned} u_{xx} + \lambda u - u^3 &= 0 \\ u(0) &= \bar{u} \quad , \quad u_x(0) = 0 . \end{aligned} \quad (PVI)$$

Para  $\lambda > 0$  as soluções autónomas deste problema, além da solução trivial  $u \equiv 0$ , incluem as duas soluções  $u \equiv \pm\sqrt{\lambda}$  que, portanto, são também soluções estacionárias do (PCI).

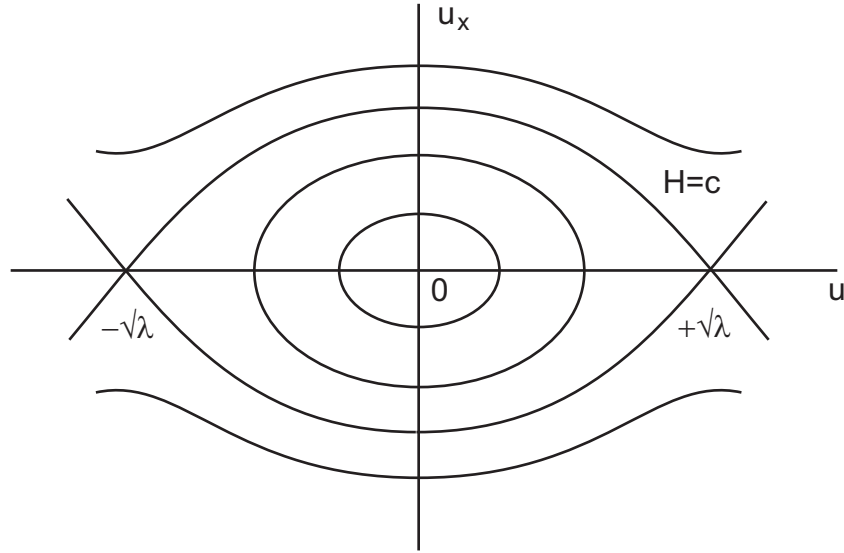


Figura 1: Curvas de nível  $H = c^{te}$ .

A equação diferencial ordinária (PVI) é integrável por quadratura, obtendo-se  $H = H(u, u_x)$  constante ao longo das soluções, onde

$$H(u, u_x) = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 = \frac{\lambda}{2}\bar{u}^2 - \frac{1}{4}\bar{u}^4 .$$

O problema (PVI) tem soluções periódicas se e só se  $\bar{u} \in I_\lambda = (-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$  para  $\lambda > 0$ .

Define-se a *aplicação do período*  $T : I_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$  da seguinte forma

$$T(\bar{u}) = \min\{T > 0 : u_x(T) = 0\}$$

$T$  é dado pelo seguinte integral abeliano

$$T(\bar{u}) = \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{(\bar{u}^2 - u^2)(2\lambda - \bar{u}^2 - u^2)}} .$$

Facilmente se conclui que

$$T(\bar{u}) = 2\sqrt{2}(2\lambda - \bar{u}^2)^{-1/2}K(\bar{u}(2\lambda - \bar{u}^2)^{-1/2})$$

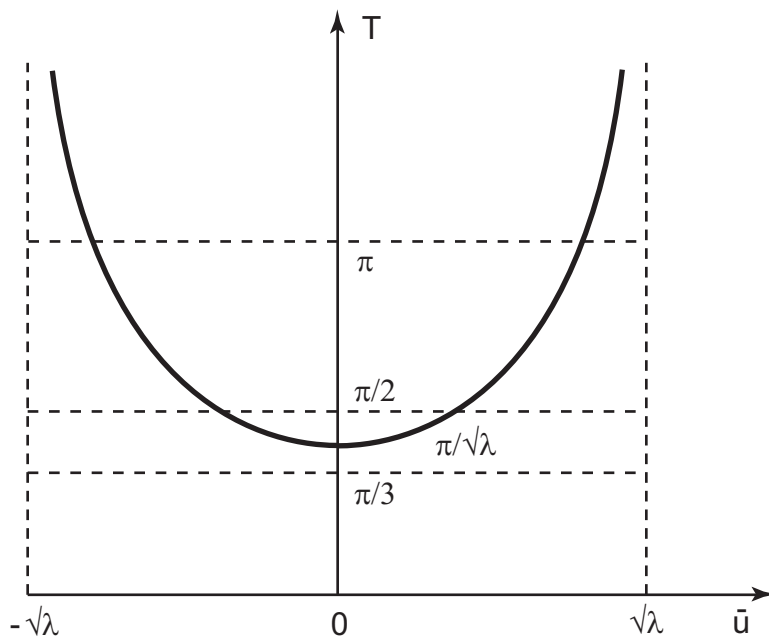


Figura 2: Aplicação do período  $T$ .

onde

$$K(\xi) = \int_0^{\pi/2} (1 - \xi^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$$

designa o integral elíptico de primeira espécie.

Então, a solução  $u = u(x, \bar{u})$  de (PVI) é uma solução de equilíbrio  $u \in E$  (não-autónoma) de (PCI) se e só se

$$kT(\bar{u}) = \pi \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

Completa-se assim a representação do diagrama de bifurcação para as soluções de equilíbrio do problema (PCI)

Outra caracterização equivalente de  $u \in E$  obtem-se integrando directamente o problema de valores iniciais (PVI).

Introduz-se a *curva de alcance*  $\Gamma$  definida no plano de fase de (PVI):

$$\Gamma = \{\gamma(\bar{u}) : \bar{u} \in \mathbb{R}\} \quad , \quad \gamma : \bar{u} \mapsto (u(\pi, \bar{u}), u_x(\pi, \bar{u}))$$

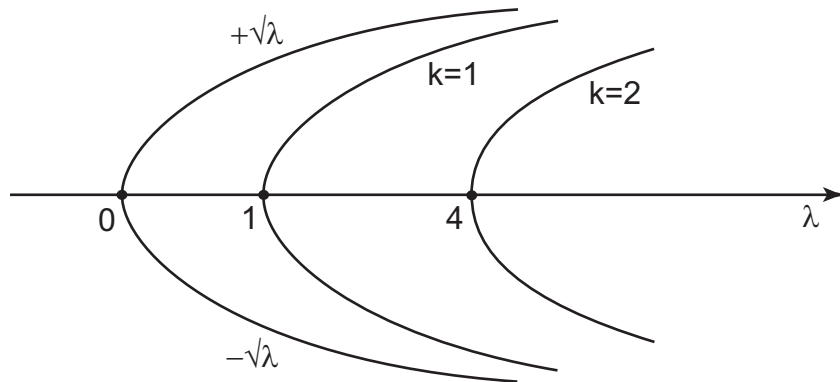


Figura 3: Diagrama de bifurcação.

e tem-se que  $u = u(x, \bar{u})$  é solução de equilíbrio  $u \in E$  se e só se:

$$\gamma(\bar{u}) \in \{u_x = 0\} \quad (\text{i.e. } u_x(\pi, \bar{u}) = 0)$$

### Linearização e análise espectral. Hiperbolicidade

O comportamento de  $T(t)$  na vizinhança de uma solução  $u(t) = T(t)u_0$  é dado pela linearização em torno de  $u$

$$v(t) = (DT(t)u_0)\psi \quad , \quad \psi \in X$$

que satisfaz a equação linear variacional:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + f_u(\lambda, u(t))v \quad , \quad 0 < x < \pi \\ v_x(t, 0) &= v_x(t, \pi) = 0 \quad , \\ v(0, x) &= \psi(x) \quad , \quad 0 < x < \pi \end{aligned} \quad (ELV)$$

onde se tomou  $f(\lambda, u) = \lambda u - u^3$ , e portanto  $f_u(\lambda, u) = \lambda - 3u^2$ . Note-se que sendo  $u \in E$  um ponto de equilíbrio a correspondente (ELV) é autónoma.

Um equilíbrio  $u \in E$  é hiperbólico se  $\mu = 0$  não é valor próprio do operador linear  $L = L(u)$  correspondente a (ELV),  $Lw = w_{xx} + f_u(\lambda, u)w$ . O problema de valores próprios é assim da forma:

$$\begin{aligned} w_{xx} + f_u(\lambda, u)w &= \mu w \quad , \quad 0 < x < \pi \\ w_x(0) &= w_x(\pi) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (PVP)$$

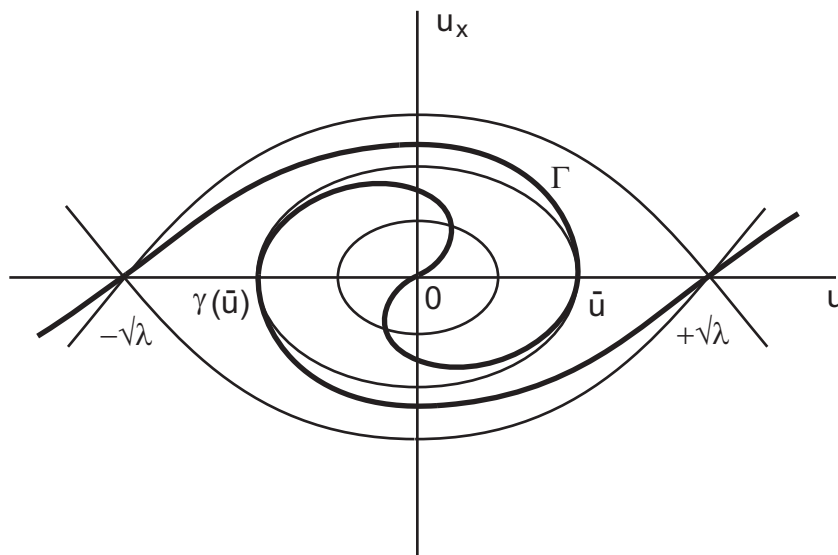


Figura 4: Curva de alcance  $\Gamma$ .

Como  $L$  é autoadjunto o seu espectro é real e constituído por valores próprios simples:

$$\sigma(L) \quad : \quad \mu_0 > \mu_1 > \mu_2 > \cdots \rightarrow -\infty .$$

No caso do equilíbrio trivial  $u \equiv 0$ , temos

$$\begin{aligned} w_{xx} + \lambda w &= \mu w , \quad 0 < x < \pi \\ w_x(0) &= w_x(\pi) = 0 , \end{aligned}$$

ao qual correspondem os valores próprios e funções próprias  $(\mu_k, w_k)$ :

$$w_k(x) = \cos kx \quad , \quad \mu_k = \lambda - k^2 , k = 0, 1, \dots$$

Assim, o equilíbrio  $u = 0$  é hiperbólico se e só se

$$\lambda \neq k^2 \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Para cada  $\lambda = k^2$  o teorema da bifurcação de valores próprios simples impõe a existência de bifurcações de soluções não-triviais a partir de  $u \equiv 0$ .

Para as soluções autónomas,  $u \equiv \pm\sqrt{\lambda} \in E$  o operador de linearização é dado por

$$Lw = w_{xx} - 2\lambda w ,$$



portanto  $\sigma(L) = \{\mu_k = -2\lambda - k^2 < 0, k = 0, 1, \dots\}$  e as soluções  $u = \pm\sqrt{\lambda}$  são estáveis para todos os valores de  $\lambda > 0$ .

A caracterização da hiperbolicidade dos equilíbrios é dada pelo seguinte:

**Teorema:** Sendo  $u \in E$  um equilíbrio, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $u = u(x, \bar{u}) \in E$  é hiperbólico;
- (ii)  $T'(\bar{u}) \neq 0$ ;
- (iii)  $\gamma(\bar{u}) \bar{\cap} \{u_x = 0\}$ .

**Dem:** (i) Diferenciando (PVI) obtem-se que  $w = \partial u / \partial \bar{u}$  é uma solução não trivial de

$$w_{xx} + (\lambda - 3u^2)w = 0 \quad , \quad w(0) = 1 \quad , \quad w_x(0) = 0$$

concluindo-se que  $u \in E$  é hiperbólico se e só se  $w_x(\pi) \neq 0$ . Então temos:

(ii) Diferenciando  $u_x(kT(\bar{u}), \bar{u}) = 0$  em ordem a  $\bar{u}$  obtem-se

$$w_x(\pi) + u_{xx}(\pi, \bar{u})kT'(\bar{u}) = 0 \quad .$$

Como  $u_{xx}(\pi, \bar{u}) = -(\lambda u - u^3) \neq 0$  temos que  $w_x(\pi) \neq 0$  se e só se  $T'(\bar{u}) \neq 0$ .

(iii) Como  $T_{\bar{u}}\gamma = \text{span}\{(w(\bar{u}), w_x(\bar{u}))\}$  a condição  $\gamma(\bar{u}) \bar{\cap} \{u_x = 0\}$  corresponde à condição  $w_x(\pi) \neq 0$ . ⊗

### Dimensão e projecção espectral das variedades instáveis

Define-se o índice de Morse de um equilíbrio hiperbólico  $u \in E$  como o número de valores próprios positivos do operador  $L$  correspondente à linearização de (PCI) em torno de  $u$

$$\lambda_0 > \dots > \lambda_{k-1} > 0 > \lambda_k > \lambda_{k+1} > \dots \quad ; \quad i(u) = k \quad .$$

A correspondente variedade instável  $W^u(u)$  é uma variedade mergulhada e satisfaz

$$\dim W^u(u) = k \quad ; \quad T_u W^u(u) = \text{span}\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\} \quad .$$

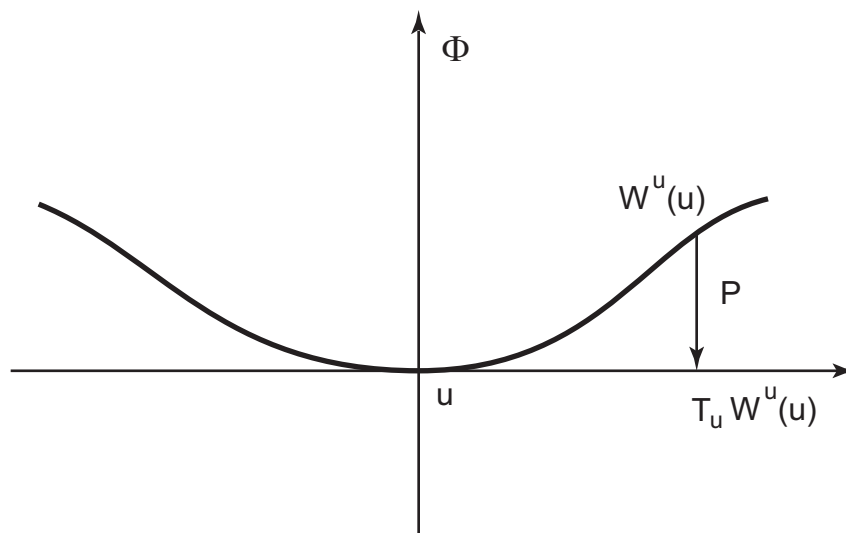


Figura 5: A variedade instável como gráfico de  $\Phi$ .

Analogamente para a variedade estável tem-se

$$\text{codim } W^s(u) = k \quad ; \quad T_u W^s(u) = \text{cl span}\{w_k, w_{k+1}, \dots\}$$

( Referir aqui que  $T(t)$  e  $DT(t)$  são injectivas )

Associada à decomposição espectral é natural introduzir as projecções

$$P = \text{proj span}\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\} \quad , \quad Q = I - P .$$

Como veremos adiante,  $P : W^u(u) \rightarrow T_u W^u(u)$  é injectiva e portanto

$$W^u(u) = \text{graf } \Phi$$

onde  $\Phi : T_u W^u(u) \rightarrow X$  é contínua.

O resultado mantém-se com qualquer projecção espectral (correspondente à linearização em qualquer ponto de equilíbrio), por exemplo a de Fourier correspondente à solução trivial

$$w_k(x) = \cos kx .$$

Associado ao fluxo gerado por este tipo de equações (escalares semilineares parabólicas) define-se em  $X$  o importante funcional

$$z(u) = \{ \text{n}^\circ \text{ de mudanças de sinal estritas de } u(x) \text{ em } 0 < x < \pi \} .$$

É um resultado clássico que  $z(\cdot)$  se comporta como um funcional de Liapunov discreto para os fluxos lineares. Atendendo ao teorema clássico de Sturm-Liouville, as propriedades oscilatórias das funções próprias associadas ao espectro de  $L$  escrevem-se em termos do funcional  $z$  da seguinte forma

$$z(w_k) = k .$$

Outro resultado clássico de Sturm é o seguinte:

**Teorema:**  $n \leq z(\sum_{k=n}^m \alpha_k w_k) \leq m$

**Dem:** Seja  $w = \sum_{k=n}^m \alpha_k w_k$ . Como  $z(w_0) = 0$  tem-se que  $z(w) = z(w/w_0)$ , e por aplicação do teorema de Rolle à relação

$$\left( \frac{w}{w_0} \right)' = \frac{w'w_0 - ww_0'}{w_0^2}$$

obtem-se

$$z(w'w_0 - ww_0') \geq z(w) + 1$$

onde se contabilizaram os dois zeros  $(w'w_0 - ww_0')|_{x=0,\pi} = 0$ .

Derivando de novo tem-se

$$(w'w_0 - ww_0')' = w_0(Lw - \lambda_0 w) = w_0 \left( \sum_{k=n}^m (\lambda_k - \lambda_0) \alpha_k w_k \right)$$

e por nova aplicação do teorema de Rolle, resulta:

$$z \left( \sum_{k=n}^m (\lambda_k - \lambda_0) \alpha_k w_k \right) \geq z(w'w_0 - ww_0') - 1 \geq z(w) = z \left( \sum_{k=n}^m \alpha_k w_k \right) .$$

Iterando repetidamente este resultado, obtem-se

$$z \left( \sum_{k=n}^m (\lambda_k - \lambda_0)^r \alpha_k w_k \right) \geq z(w) \geq z \left( \sum_{k=n}^m (\lambda_k - \lambda_0)^{-r} \alpha_k w_k \right)$$

para todo o  $r = 1, 2, \dots$ , e para  $r$  suficientemente grande conclui-se

$$n \leq z(w) \leq m .$$

⊗

### Princípio de Sturm-Matano

O resultado fundamental no estudo do fluxo gerado pelas equações escalares semilineares parabólicas é o seguinte resultado clássico frequentemente redescoberto:

**Teorema:** (Princípio de Sturm-Matano) Ao longo das soluções  $w = w(t, x)$  da equação (ELV) a função  $z(w(t, \cdot))$  é monótona não crescente.

**Dem:** A função  $\tilde{w}(t, x) = e^{\phi(x)-rt}w(t, x)$  onde  $\phi(x) = x(1 - x/\pi)$  satisfaz

$$\tilde{w}_t = \tilde{w}_{xx} + a(t, x)\tilde{w} \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

$$\tilde{w}_x - \tilde{w} = 0 \text{ em } x = 0 \quad , \quad \tilde{w}_x + \tilde{w} = 0 \text{ em } x = \pi$$

com  $a(t, x) < 0$  se  $r > 0$  for escolhido suficientemente grande.

Sem perda de generalidade, seja  $D \subset [0, \tau] \times [0, \pi]$  uma região conexa onde  $\tilde{w} > 0$ . Note-se que a transformação  $w \mapsto \tilde{w}$  não altera a região  $D$ .

Então em  $D$  tem-se  $\tilde{w}_t - \tilde{w}_{xx} \leq 0$  e pelo princípio do máximo forte o máximo de  $\tilde{w}$  em  $D$  apenas pode ocorrer na fronteira

$$\Sigma = \{0\} \times [0, \pi] \cup [0, \tau] \times \{0, \pi\} .$$

No entanto o máximo  $\max_D \tilde{w}(t, x) > 0$  não pode ocorrer nas laterais onde se obteria a contradição:

$$\tilde{w}(0, t) = \tilde{w}_x(0, t) \leq 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{w}(\pi, t) = -\tilde{w}_x(\pi, t) \leq 0 .$$

Conclui-se portanto que  $D \cap \{0\} \times [0, \pi] \neq \emptyset$  e assim para  $t = \tau$  existem pelo menos tantas componentes  $\{\tilde{w} \neq 0\}$  como em  $t = 0$ .

Por aplicação do teorema da curva de Jordan obtém-se ainda a mesma ordenação destas componentes em  $t = 0$  e em  $t = \tau$ .

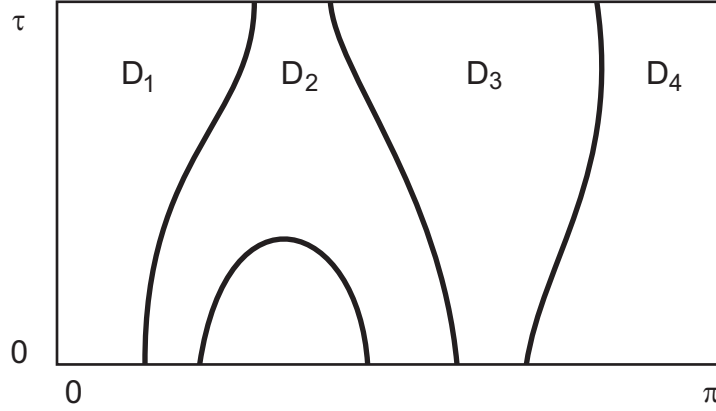


Figura 6: Regiões  $D_i$  onde  $\text{sgn } w \neq 0$ .

Pode ainda mostrar-se que para  $t > 0$  se tem  $z(w(t, \cdot)) < \infty$  e que se  $w(t_0, \cdot)$  possui um zero múltiplo então  $z(w(t, \cdot))$  decresce estritamente em  $t = t_0$ :

$$z(w(t_0 - \varepsilon, \cdot)) > z(w(t_0 + \varepsilon, \cdot))$$

para todo o  $\varepsilon > 0$ .

Deste resultado fundamental obtêm-se inúmeras consequências, em particular relativamente ao comportamento do fluxo sobre as variedades  $W^u(u)$  e  $W^s(u)$ :

**Teorema:** Sendo  $u \in E$  um equilíbrio hiperbólico com índice de Morse  $i(u) = n$ , então

- (i) para  $v_j = v_j(t, \cdot) \in W^u(u)$ ,  $j = 1, 2$ , duas órbitas na variedade instável de  $u$ , tem-se:

$$z(v_1 - v_2) < n ;$$

- (ii) para  $v_j = v_j(t, \cdot) \in W^s(u)$ ,  $j = 1, 2$ , duas órbitas na variedade estável de  $u$ , tem-se:

$$z(v_1 - v_2) \geq n .$$

**Dem:** (esboço) Se  $v_1, v_2 \in W^u(u)$  então  $w = v_1 - v_2$  satisfaz a equação linear

$$w_t = w_{xx} + a(t, x)w \quad (LIN)$$

onde

$$a(t, x) = \int_0^1 f_u(\lambda, sv_1 + (1-s)v_2) ds$$

e tem-se que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t, \cdot) = 0$ . Em particular, (*passo delicado*) como  $a(t, x) \rightarrow f_u(\lambda, u)$  quando  $t \rightarrow -\infty$  a equação (LIN) aproxima-se da equação linear variacional (ELV) em  $u \in E$ , a qual se usou para a caracterização espectral de  $W^u(u)$  na vizinhança de  $u$ .

Então  $w \in W^u(0)$  para (LIN) e portanto  $z(w) < n$ .

Destes resultados segue a injectividade da projecção espectral.

Designando por  $E_k = \text{span}\{w_k\}, k = 0, 1, \dots$  e

$$U = \bigoplus_{k=0}^{n-1} E_k \quad , \quad S = \text{cl} \bigoplus_{k=n}^{\infty} E_k$$

então  $P : W^u(u) \rightarrow U$  é injectiva visto que se  $v_1 \neq v_2$  e  $Pv_1 = Pv_2$  obtem-se

$$z(v_1 - v_2) = z(Q(v_1 - v_2)) \geq n$$

mas como  $v_1, v_2 \in W^u(u)$  forçosamente se tem que  $z(v_1 - v_2) < n$ , uma contradição.

Mais uma vez, como este resultado não depende da base  $\{w_0, w_1, \dots\}$  escolhida, pode sem perda de generalidade usar-se a base de Fourier

$$F_k = \text{span}\{\cos kx\}, k = 0, 1, \dots$$

### Filtrações. Transversalidade

O estudo do comportamento local na vizinhança de  $u \in E$  pode ser bastante mais detalhado, utilizando a separação que existe entre as taxas exponenciais correspondentes aos diferentes espaços espectrais. Para tal considera-se o resultado anterior tomando  $v_2 = u$ . Sendo  $u \in E$  hiperbólico, existem filtrações das variedades estáveis e instáveis constituídas por subvariedades invariantes com as seguintes propriedades:

**Teorema:** (Filtração instável) Nas condições anteriores a variedade instável  $W^u(u)$  possui uma filtração constituída por subvariedades invariantes

$$W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{m-1} = W^u(u) \ ,$$

com as seguintes propriedades

- (i)  $T_u W_j = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_j$  ;  $\dim W_j = j + 1$
- (ii) Para  $w \in W_j \setminus W_{j-1}$ , seja  $v(t, \cdot) = T(t)w$  (definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ ).  
Então existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{v(t, \cdot) - u(\cdot)}{\|v(t, \cdot) - u(\cdot)\|} = \varphi \in E_j \setminus \{0\}$$

- (iii) Para  $w \in W_j \setminus W_{j-1}$  existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$z(v(t, \cdot) - u(\cdot)) = j \text{ para todo } t < t_0 .$$

Analogamente

**Teorema:** (Filtração estável) Nas condições anteriores a variedade estável  $W^s(u)$  possui uma filtração constituída por subvariedades invariantes

$$W^s(u) = W_m \supset W_{m+1} \supset \dots ,$$

com as seguintes propriedades

- (i)  $T_u W_k = \text{cl}\{E_k \oplus E_{k+1} \oplus \dots\}$  ;  $\text{codim } W_k = k$
- (ii) Para  $w \in W_k \setminus W_{k+1}$ , seja de novo  $v(t, \cdot) = T(t)w$ . Então existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t, \cdot) - u(\cdot)}{\|v(t, \cdot) - u(\cdot)\|} = \psi \in E_k \setminus \{0\}$$

- (iii) Para  $w \in W_k \setminus W_{k+1}$  existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$z(v(t, \cdot) - u(\cdot)) = k \text{ para todo } t > t_0 .$$

*Nota:* (Aqui deve usar-se o fluxo variacional  $DT(t)\psi$  com  $\psi = v_1 - v_2$ ) As afirmações (ii) dos teoremas anteriores são ainda válidas na forma

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\dot{v}(t, \cdot)}{\|\dot{v}(t, \cdot)\|} = \phi^\pm$$

onde  $\dot{v} = dv/dt$ .

Finalmente podemos formular o teorema da transversalidade.

**Teorema:** (Angenent-Henry) As variedades invariantes de equilíbrios hiperbólicos  $u^\pm \in E$  são transversais:

$$W^u(u^-) \bar{\cap} W^s(u^+) .$$

**Dem:** (esboço) Seja  $W^u(u^-) \cap W^s(u^+) \neq \emptyset$ . Então existe  $u(t) = T(t)u_0$ , uma solução global limitada, tal que  $\omega(u_0) = u^+$ ,  $\alpha(u_0) = u^-$ . A observação crucial é a seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{u}(t, \cdot)}{\|\dot{u}(t, \cdot)\|} = c^- w_j \quad , \quad j < i(u^-)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{u}(t, \cdot)}{\|\dot{u}(t, \cdot)\|} = c^+ w_k \quad , \quad k \geq i(u^+)$$

onde  $c^-, c^+$  são constantes não nulas. Então, como  $z(\dot{u}(t))$  é monótona não-crescente, obtem-se

$$i(u^-) > j \geq k \geq i(u^+)$$

Além disso,

$$\dot{u}(0) \in T_{u_0}W^u(u^-) \cap T_{u_0}W^s(u^+) .$$

Considere-se o subespaço tangente  $T_{u_0}W^u(u^-)$ , e seja

$$L_n(u_0) = \{0\} \cup \left\{ v \in T_{u_0}W^u(u^-), v \neq 0 : \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{DT(t)u_0 v}{\|DT(t)u_0 v\|} = c^- w_m^- \text{ com } m < n \right\} .$$

Para cada  $n = 1, \dots, i(u^-)$  existe um subespaço linear  $L_n(u_0) \subset T_{u_0}W^u(u^-)$  tal que se  $v \in L_n(u_0) \setminus \{0\}$  então  $z(v) < n$ .

Por outro lado sabemos que  $z(v) \geq N$  onde  $N = i(u^+)$  para cada  $v \in T_{u_0}W^s(u^+) \setminus \{0\}$ .

Se  $u^+$  é estável (caso  $N = 0$ ) a transversalidade é trivial. No caso  $N \geq 1$  temos que  $L_N(u_0) \cap T_{u_0}W^s(u^+) = \{0\}$ , e portanto

$$L_N(u_0) \oplus T_{u_0}W^s(u^+) = X$$

concluindo-se a transversalidade:

$$T_{u_0}W^u(u^-) + T_{u_0}W^s(u^+) = X$$



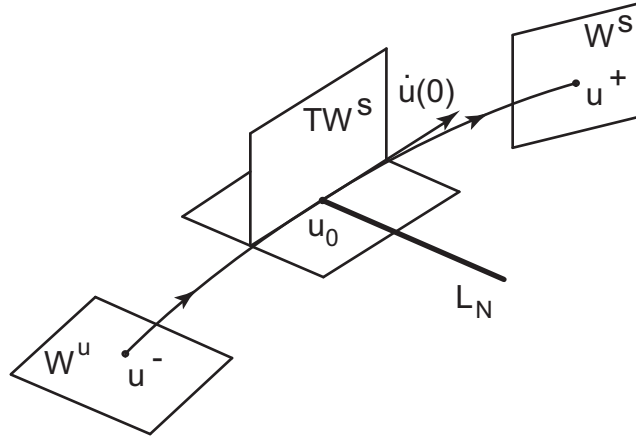


Figura 7: Transversalidade entre  $W^u(u^-)$  e  $W^s(u^+)$ .

De forma inteiramente análoga obtém-se a transversalidade das filtrações introduzidas anteriormente.

**Teorema:** Sejam  $u^+, u^- \in E$  hiperbólicos e considerem-se as filtrações:

$$W_0^- \subset W_1^- \subset \dots \subset W_{m-1}^- = W^u(u^-)$$

$$W^s(u^+) = W_n^+ \supset W_{n+1}^+ \supset \dots$$

Então todas estas variedades invariantes são transversais:

$$W_j^- \bar{\cap} W_k^+$$

### Propriedade de Morse-Smale. Decomposição de Morse

Em conclusão, o atrator do sistema dinâmico gerado por (PCI) é Morse-Smale para todos os valores  $\lambda \neq k^2$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Considerando o diagrama de bifurcação, e em particular a bifurcação de forquilha local, pode então obter-se a estrutura geométrica global do atrator:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{u_j \in E} W^u(u_j)$$

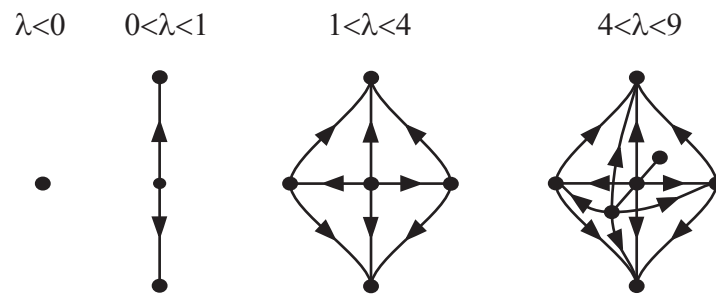


Figura 8: Atratores de Chafee-Infante.

E facilmente se conclui a decomposição de Morse correspondente

### Classificação

(*esboço*) Caracterização (aplicação do índice de Conley)

(global)  $\longrightarrow$  Curva de alcance: Permutações meândricas de Morse

(local)  $\longrightarrow$   $k$ -adjacência

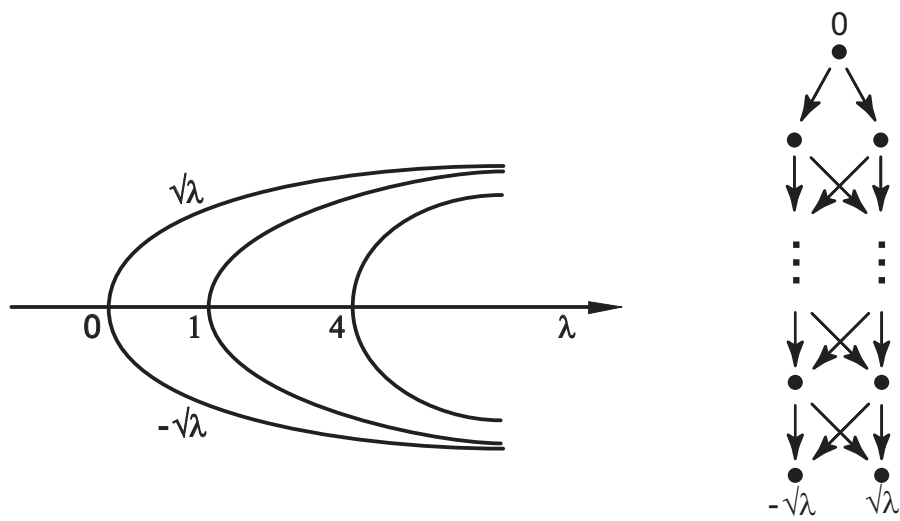


Figura 9: Diagrama de bifurcação e decomposição de Morse.