

# REVISÃO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Carlos Daniel Paulino

## Regra fundamental da contagem

Considere-se uma e.a. composta por  $k \geq 2$  etapas, em que há  $m_i$  resultados possíveis na etapa  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . O número total de resultados da e.a. é  $m = \prod_{i=1}^k m_i$ .

Exemplo:  $\epsilon$ : Lançamentos sucessivos (um objecto de cada vez) de dois dados e uma moeda (com todas as faces distintas para cada um dos 3 objectos)  $\rightarrow m = 6 \times 6 \times 2 = 72$ .

## Sequências ordenadas vs não ordenadas

Considere-se uma experiência de selecção de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos. Consoante a ordem de selecção for ou não registada, assim o subconjunto de  $k$  elementos diz-se formar uma sequência ordenada ou não ordenada de dimensão  $k$ .

Tipos possíveis de extracção de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos:

Uma extracção simultânea,  $k$  extracções simples sucessivas sem e com reposição (só os dois primeiros é que impossibilitam a eventual repetição de elementos nas sequências obtidas).

## Tipos especiais de sequências

Considere-se uma experiência de obtenção de sequências de  $k$  ( $k \leq n$ ) elementos de um conjunto de  $n$  elementos distintos.

**Arranjos (simples)** de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ : sequências de elementos não repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos seleccionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extracções simples sucessivas sem reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas sem reposição**.

Número de arranjos:  $A_k^n = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

**Arranjos completos** de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ : sequências de elementos possivelmente repetidos que se distinguem umas das outras pelos elementos seleccionados ou pela ordem com que o são.

Frequentes em esquemas de extracções simples sucessivas com reposição. Daí corresponderem a **sequências (amostras) ordenadas com reposição**.

Número de arranjos completos:  $A_k^{*n} = n \times n \times \dots \times n = n^k$ .

**Permutações** de  $n$  elementos: arranjos de  $n$  elementos tomados  $n$  a  $n$ .

Número de permutações:  $P_n = A_n^n = n!$ .

**Combinações** de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ : sequências de elementos não repetidos mas que não se distinguem umas das outras pela ordem em que os  $k$  elementos são seleccionados (diferem entre si apenas pelos elementos seleccionados).

Frequentes em esquemas de extracção simultânea. Daí corresponderem a **sequências (amostras) não ordenadas sem reposição**.

Número de combinações:  $C_k^n \equiv \binom{n}{k} = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**Permutações de  $n$  elementos não todos distintos:**

Considere-se que os  $n$  elementos são de  $r > 1$  tipos, havendo  $k_i$  elementos do tipo  $i$  e indistinguíveis entre si (pelo que  $n = \sum_{i=1}^r k_i$ ). O número de permutações possíveis tendo em conta a indistinguibilidade dos elementos de cada tipo é

$$P_n^{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r k_i!}$$

Quando  $r = 2$ ,  $P_n^{k_1, k_2} = C_{k_1}^n$ .

**Exemplos ilustrativos:**

**1.** Dispondo de 4 peças de pano de cores azul, vermelho, branco e preto, respectivamente, quantas bandeiras tricolores de faixas de pano verticais se podem formar sem repetir as cores? E quantas destas têm a 1ª faixa de cor vermelha?

R:  $A_3^4$ ;  $A_2^3$

**2.** Selecciona-se ao acaso um grupo de  $k$  cidadãos portugueses nascidos em anos comuns. Qual o nº de sequências dos seus dias de aniversário? Quantas destas têm a particularidade de pelo menos 2 cidadãos fazerem anos no mesmo dia?

R:  $A_k^{*365}$ ;  $A_k^{*365} - A_k^{365}$

**3.** Supondo que a inspecção sucessiva do funcionamento de 6 máquinas, numeradas de 1 a 6, segue uma ordem completamente arbitrária, de quantas maneiras pode essa inspecção ser feita? Quantas destas correspondem à situação em que as 1ª e 2ª inspeccionadas foram as máquinas 1 e 6, respectivamente?

R:  $P_6$ ;  $P_4$

4. De uma urna com pelo menos uma dezena de bolas de cada uma de várias cores (verde, amarelo, etc.) seleccionam-se ao acaso 9 delas. Quantas amostras se podem obter contendo 4 verdes e 3 amarelas? E contendo 4 verdes?

R:  $P_9^{4,3,2}; C_4^9$ .

### Exercícios adicionais:

**2.6:** Uma lotaria tem 10000 bilhetes numerados de 0000 a 9999. O número do primeiro prémio é o número do bilhete saído numa extracção ao acaso.

1. Um jogador comprou um bilhete com o número 6789. Qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

R:  $10^{-4}$

2. Se o jogador comprar todos os bilhetes cujos números têm todos os algarismos iguais, qual a probabilidade de lhe sair o primeiro prémio?

R:  $10^{-3}$

3. Qual a probabilidade de o número premiado ter todos os algarismos diferentes? (*Teste 26 Nov 1994*)

R:  $A_4^{10}/10000 = 0.504$

**2.7:** Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças. Qual a probabilidade de:

1. As pessoas, dentro de cada um daqueles três grupos, estarem de seguida?

R:  $3! \times 4!3!2!/9! = 4.8 \times 10^{-3}$

2. As 2 crianças estarem juntas?

R:  $8 \times 7!2!/9! = 0.222$

**2.9:** De um grupo de 50 alunos do IST (10 alunos por ano) é escolhida ao acaso uma comissão coordenadora de 4 pessoas. Qual a probabilidade de:

1. Ser escolhido um e um só aluno do 1ºano?

R:  $C_1^{10}C_3^{40}/C_4^{50} = 0.429$

2. Serem escolhidos um aluno (e só um) do 1ºano e um aluno (e só um) do 5ºano?

R:  $C_1^{10}C_1^{10}C_2^{30}/C_4^{50} = 0.189$

3. Serem escolhidos no máximo dois alunos do 1º ano?

$$\text{R: } \sum_{i=0}^2 C_i^{10} C_{4-i}^{40} / C_4^{50} = 0.978$$

4. Serem todos do mesmo ano?

$$\text{R: } 5 \times C_4^{10} / C_4^{50} = 5 \times 10^{-3}$$

**2.10:** Um grupo de apostadores do totobola decidiu jogar todas as apostas possíveis contendo 7 vitórias em casa, 4 empates e 2 vitórias fora. Calcule a probabilidade desse grupo ganhar o totobola.

$$\text{R: } P_{13}^{7,4,2} / A_{13}^{*3} = 1.6 \times 10^{-2}$$

**2.11:** Suponha que uma cidade tem  $n + 1$  habitantes e que um deles conta um boato a outro, que por sua vez o repete a um terceiro, e assim sucessivamente. Em cada passo, a pessoa que ouve o boato é escolhida ao acaso de entre as  $n$  restantes. Determine a probabilidade de que um boato seja contado  $r$  vezes:

1. Sem antes voltar a ser contado à pessoa que lhe deu início.

$$\text{R: } \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}$$

2. Sem que ninguém o ouça mais do que uma vez.

$$\text{R: } A_r^n / A_r^{*n}$$

---

**CDP, Setembro 2011**