Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º Semestre — 8/01/2004

Nome:____
Número:______________________________ Curso:______

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 11

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 12 a 22.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

Deve responder nos espaços em branco e no verso das folhas. Caso não tenha espaço neste enunciado, pode entregar folhas adicionais devidamente **identificadas** com nome e número.
Antes de entregar deve assinalar a qual dos testes respondeu.

Cotações: Perguntas de escolha múltipla: Correctas: 1.5val. Erradas: - 0.5val. Para quem entregar o 1º Teste e o 2º Teste a classificação será dada pela média: $(T1 + T2)/2$.

A preencher pelo Aluno:

Indique qual ou quais dos testes entrega:

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐
2º Teste ☐

A preencher pelo Docente:

Correctas
Erradas
TEM

Correctas
Erradas
TEM

Registo:

9		
10a)	b)	
11a)	b)	
Nota		

20a)	b)	c)
21a)	b)	
22a)	b)	
Nota		

Nota T1:
Nota T2:
Nota T1+T2:

Início do 1º Teste

1. Para a matriz $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ Qualquer que seja α a car $(A_\alpha) = 3$.
☐ Há uma infinidade de valores de α para os quais $A_\alpha x = 0$ é sempre possível e determinado.
☐ Há somente um valor de α para o qual car $(A_\alpha) \neq 3$.
☐ O sistema $A_\alpha x = b$, com $b \neq 0$, é sempre indeterminado.

---

2. Seja A uma matriz 5×4 de característica igual a 3 e $b \neq 0$ um vector para o qual a característica da matriz aumentada $[A|b]$ é 3. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**
☐ O sistema $Ax = b$ é sempre possível.
☐ A dimensão do núcleo de A é 0.
☐ O sistema $Ax = b$ é impossível.
☐ O sistema homogéneo $Ax = 0$ é possível e determinado.

---

3. Seja A uma matriz 3×3 tal que $A^2 = -I$, onde I designa a matriz identidade. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ A matriz A não é invertível.
☐ $\det(A) = 1$.
☐ $\det(A^{-1}) = \det(A)$.
☐ O sistema $A^2 x = b$ tem solução $x = -b$.

---

4. Seja A uma matriz $n \times p$ tal que a dimensão do núcleo de A é 2, a dimensão do núcleo de A^T é 1, e a dimensão do espaço das linhas de A é 2. Então **[1.5]**

☐ $n = 4$ e $p = 5$. ☐ $n = 5$ e $p = 4$. ☐ $n = 3$ e $p = 4$. ☐ $n = 4$ e $p = 3$.

---

5. O valor do determinante **[1.5]**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 \\ \alpha & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

é:

☐ $4(1+\alpha)$. ☐ $4+10\alpha$. ☐ $-6+4\alpha$. ☐ $10(1+\alpha)$.

---

6. Sejam u, v, w vectores linearmente independentes de um espaço linear real U. Então: **[1.5]**

☐ A dimensão de U é 3.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é 3.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é diferente da dimensão de $L(\{u, v, w\})$.
☐ A dimensão de U é inferior a 3.

---

7. Considere a base ordenada $B = (1, t+1, t^2-1)$ do espaço linear real dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2 . As coordenadas do polinómio $p(t) = at^2 + bt + c$ na base B são: **[1.5]**

☐ (a, b, c). ☐ $\frac{1}{2}(a+c-b, 2b, 2a)$. ☐ $(c, a-b, b)$. ☐ $(a-b+c, b, a)$.

---

8. Considere as bases ordenadas $B_1 = (1-t, t)$ e $B_2 = (t-1, t+2)$ do espaço linear real dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 1. Então a matriz de mudança de base, da base B_1 para a base B_2 é **[1.5]**

☐ $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

---

9. Discuta as soluções do sistema seguinte em termos dos parâmetros reais α e β. **[3]**

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha y + z = 2\beta + 1 \\ \alpha x + 2z = \beta \end{cases}$$

---

10. Seja A uma matriz quadrada que verifica $A^3 + 5A^2 = I$.

a) Justifique que A é uma matriz invertível. e mostre que $A^{-1} = A^2 + 5A$. **[1.5]**

b) Mostre que $\lambda = -5$ nunca verifica a expressão $\det(A - \lambda I) = 0$. **[1.0]**

---

11. Considere o seguinte subconjunto V do espaço linear real dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a dois:

$$V = \left\{1 + 2x + x^2, 1 - x^2, 1 + x, -1 + 2x, 3 + 4x + x^2\right\}$$

a) Determine um subconjunto de V que forme uma a base para o espaço gerado por V. **[1.5]**

b) Diga justificando se é ou não verdadeira a afirmação: **[1]**
$L(V) = L\left(\{1 + 2x + x^2, 1 + x, 3 + 4x + x^2\}\right)$.

$\boxed{\textbf{FIM do } 1^{\text{o}} \textbf{ Teste}}$

Início do 2º Teste

12. Quais das funções seguintes são transformações lineares? **[1.5]**

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(x, y) = (2x + 1, 2y, x)$
$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $H(x, y) = 2x + 1 + 2y$
$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $G(x, y) = (2x, 2y, z)$
$K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $K(x, y, z) = (x + y, 2y, y + z)$

☐ F e K ☐ G e K ☐ F e H ☐ H e K

---

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a reflexão em relação ao plano yz. A matriz que representa T em relação à base canónica é: **[1.5]**

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por **[1.5]**

$$T(1, 1, 0) = (2, 1) \qquad T(0, 1, 1) = (1, 1) \qquad T(1, 0, 0) = (1, 1).$$

Então,

☐ $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ ☐ $T(x, y, z) = (y - x, x + 2z)$

☐ $T(x, y, z) = (2z + x + y, x - z)$ ☐ $T(x, y, z) = (2x, x + z)$

---

15. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ Se λ é um valor próprio de T então $T - \lambda I$ não é invertível.
☐ Se $T - \lambda I$ é sobrejectiva então λ é valor próprio de T.
☐ Se T tem dois valores próprios distintos então T é invertível.
☐ Se λ é valor próprio de T então a característica de $T - \lambda I$ é 3.

---

16. Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz real , 2×2, tal que $a_{11} + a_{22} = 0$ e $\det(A) = 1$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ Zero é um valor próprio de A.
☐ O polinnómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
☐ A matriz A não tem valores próprios complexos.
☐ 1 e -1 são valores próprios de A.

---

17. A solução do problema de valor inicial **[1.5]**

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = 8 \text{ e } y_2(0) = 5 \end{cases}$$

é:

☐ $(3e^t + 5e^{3t}\,,\, 5e^{3t})$.
☐ $(3e^{3t} + 5e^t\,,\, 5e^t)$.
☐ $(8e^t\,,\, 5e^{3t})$.
☐ $(3e^t + 5e^{2t} + 3e^{3t}\,,\, 5e^{3t})$.

---

18. Considere os vectores de $\mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ $\langle u, v\rangle = x_1y_1$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
☐ $\langle u, v\rangle = x_1y_2 + x_2y_1$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
☐ $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 10x_2y_2$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
☐ $\langle u, v\rangle = 3x_1y_2 + 5x_2y_1$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

---

19. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x - y + z = 0\}$. Para o produto interno usual, uma base ortogonal para W é **[1.5]**

☐ $\{(-1/2, 1/2, 1)\}$
☐ $\{(1, 1, -2)\,,\, (-1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\,,\, (-1/2, 1/2, 1)\}$

---

20. Seja P_2 o espaço linear real dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2 e $T : P_2 \to P_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = p'(x)$ onde p' designa a derivada de p.

a) Determine o núcleo de T e uma sua base. **[1]**

b) Determine a dimensão do contradomínio de T e justifique se T é ou não bijectiva. **[0.5]**

c) Para a base ordenada $B = (1 + x, x, x^2 + 1)$, de P_2, determine a matriz que representa T em relação à base B no espaço de partida e no de chegada. Use ainda a matriz que determinou para calcular $T(x^2 + 3x - 1)$. **[1.5]**

---

21. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja representação matricial na base canónica é

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios de T e os respectivos espaços próprios. **[1.5]**

b) Determine uma base de vectores de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual a representação matricial de T é: **[1]**

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

22. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e o subespaço linear

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + z = 0\right\}.$$

a) Exprima $u = (1, -1, 1)$ na forma $u = u_1 + u_2$ onde $u_1 \in W$ e $u_2 \in W^\perp$. **[1.5]**

b) Use o resultado da alínea anterior para calcular a distância de u a W e o elemento de W mais próximo de u. **[1]**