Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

10ª **Lista de Exercícios**

Problema 1.
Seja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ um produto interno num espaço linear V. Mostre que, para qualquer vector $\mathbf{v} \in V$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

Problema 2.
Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:
a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ *b)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

Problema 3.
Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.
a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ *b)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$ *d)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

Problema 4.
Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^4$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.
a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ *b)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_4^2v_4^2$
c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 + u_4v_4$ (*d*) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

Problema 5.
No espaço linear real de todos os polinómios reais, determine se $\langle f, g \rangle = f(1)g(1)$ é um produto interno, e, em caso negativo, indique quais dos axiomas da definição de produto interno são violados.

Problema 6.
Utilize os produtos internos do exercício 2 para calcular:
a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$. *b)* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (-1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 5)$.

Problema 7. Utilize os produtos internos usuais para calcular:
(*a*) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$. (*b*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, 1)$.

(c) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$. (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$.
(e) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (3, 4, 0, -2)$. ($f$) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$.

Problema 8.

Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\|k\mathbf{v}\| = 5$, com $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$?

Problema 9.

Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$. (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$.

Problema 10.

Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre dois vectores, com norma igual a um, que sejam ortogonais aos três vectores seguintes:

$\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

Problema 11.

Calcule o {angulo que o vector $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ faz com os vectores coordenados unitários de $\mathbb{R}^2$ (use o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$).

Problema 12.

Utilizando o produto interno usual, verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$.
b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$
d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

Problema 13.

Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$?

(a) $\{(0, 1), (2, 0)\}$ (b) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (c) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

Problema 14.

Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (b) $\{(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$

Problema 15.

Converta os seguintes conjuntos de vectores (ortogonais relativamente ao produto interno usual) em conjuntos ortonormais.

(a) $\{(-1,2)\,,(6,3)\}$ (b) $\{(1,0,-1)\,,(2,0,2)\,,(0,5,0)\}$

Problema 16.

Sejam $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Mostre que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{R}^2$ está definido o produto interno $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$, mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

Problema 17.

Prove que as colunas de uma matriz A, $m \times n$, são ortoganais se e só se A^TA é uma matriz diagonal, e são ortonormais se e só se A^TA é a matriz identidade. A uma matriz com esta última propriedade chama-se matriz ortogonal.