Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

2ª **Lista de Exercícios**

Problema 1. Considere as seguintes matrizes aumentadas em escada de linhas com pivots iguais a um. Resolva cada um dos respectivos sistemas de equações lineares.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 7y & + & 4z & = & 10 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rcc} z_1 - z_2 & = & 1-2i \\ (1+i)z_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Problema 3. Utilizando o Método de Eliminação de Gauss, resolva cada um dos sistemas de equações lineares homogéneos $Au = 0$ onde A é a matriz:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Problema 4. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & -3 \\ & & & & az & = & 0 \\ x & - & 5y & - & 5z & = & b \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & & & \beta z & = & 2 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & 4z & = & 4 \\ & & \alpha y & + & 2z & = & \beta \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & - & 2z & = & 0 \\ & & cy & + & 4z & = & d \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & & & z & = & 2 \\ & & & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

Problema 5. Determine os valores de λ para os quais os sistemas seguintes admitem soluções não triviais. Nesses casos, determine essas soluções e diga qual o seu significado geométrico.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & 2y & = & \lambda x \\ x & & & = & \lambda y \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & \lambda x \\ -2x & + & 8y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

Problema 6. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontre matrizes elementares tais que $E_k...E_1A = I$.

b) Escreva A^{-1} como um produto de k matrizes elementares.

c) Escreva A como um produto de k matrizes.

Problema 7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1...E_kR$, onde as matrizes $E_j, j = 1, ..., k$ são matrizes elementares e R uma matriz em escada de linhas.

Problema 8. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas a, b, c, d, e, f, g, h reais.

Problema 9. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad h)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad i)\ \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 10. Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$a)\ \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

em que k_1, k_2, k_3, k_4, k são reais.

Problema 11. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$ invertíveis, então AB também é invertível.