

Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

3ª Lista de Exercícios

Problema 1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Considere por hipótese que $\det(A) = -7$.

Calcule

$$a) \det(3A) \quad b) \det(2A^{-1}) \quad c) \det((2A)^{-1}) \quad d) \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

Problema 2. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ é satisfeita a equação

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 3. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 4. Escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

Problema 5. Escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 & e_1 + f_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 & e_2 + f_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 + d_3 & e_3 + f_3 \end{vmatrix}$$

como uma soma de oito determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

Problema 6. Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

$$a) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Problema 7. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

Problema 8. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares utilizando a regra de Cramer.

$$a) \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

Problema 9. Use o desenvolvimento de Laplace para calcular os determinantes das matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, calcule a inversa de A e de B sem utilizar o método de Eliminação de Gauss.