Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

7ª Lista de Exercícios

Problema 1.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, e considere a base ordenada $B_1 = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (-1, 0)$.

a) Calcule, em relação à base B_1 no espaço de partida e de chegada, a matriz $A = M(T, B_1, B_1)$, que representa T relativamente a esta base.
b) Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$, $B = M(T, BC, BC)$, e relacione-a com a matriz A através da matriz mudança de base.
c) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Problema 2.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$, e considere as bases ordenadas $B_1 = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ e $B_2 = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{v_1} = (1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-2, 4)$, $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (2, 2, 0)$, e $\mathbf{u_3} = (3, 0, 0)$.

a) Calcule, em relação às base B_1 e B_2 no espaço de partida e de chegada, respectivamente, a matriz $A = M(T, B_1, B_2)$, que representa T relativamente a essas bases.
b) Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, $B = M(T, BC, BC)$, e relacione-a com a matriz A através das matrizes mudança de base.
c) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Problema 3. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $BC = (e_1, e_2, e_3)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1))$.

a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$.
b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na base BC, determine as suas coordenadas (y_1, y_2, y_3) na base $\mathcal{B}$.

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

Problema 4.

Sejam $v_1 = (1,3)$ e $v_2 = (-1,4)$, e seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $B = (v_1, v_2)$.

a) Encontre as componentes de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B.
b) Encontre as componentes de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.
c) Encontre a matriz que representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, e encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.
d) Use a fórmula obtida em c) para calcular $T(1,1)$.

Problema 5.

Sejam $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por $T(1+t^2) = 2t, \quad T(t^2) = 2t, \quad T(1+t) = 1$.

a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2$.
b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $(1,\ 1+t,\ 1+t+t^2)$. Indique a matriz de mudança de base, S, tal que $B = S^{-1}AS$.

Problema 6.

Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2, de entradas a_{ij}, satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.
b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(H) = J\ ,\ T(J) = -H\ ,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J.

Problema 7.

Sejam $T : U \to V$ e $S : U \to V$ duas transformações lineares, e seja a um número real. Mostre que $T + S$ e aT são transformações lineares de U para V.

Problema 8.
Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ duas transformações lineares. Mostre que $S \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.

Problema 9.
Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que:

a) o núcleo de T é um subespaço linear de U;
b) a imagem de T é um subespaço linear de V.

Problema 10. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:

a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e T_2 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos yy;
b) T_1 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_1 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e T_2 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_2 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;
c) T_1 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos yy;
d) T_1 é a expansão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num factor $c \in \mathbb{R}$ e T_2 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao eixo dos zz ;
e) T_1 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ_1 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ_2 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao eixo dos zz.

Problema 11.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2).$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.
c) Verifique o teorema da dimensão.

Problema 12.
Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3).$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não esteja na imagem da transformação.

c) Verifique o teorema da dimensão.

Problema 13. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T_2 \circ T_1$ e encontre o transformado $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

a) $T_1(x, y) = (2x, 3y)$, $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$.
b) $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$, $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$.
c) $T_1(x, y, z) = (x - y, y + z, x - z)$, $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$.

Problema 14.
Diga, justificando, quais das seguintes transformações lineares são isomorfismos:

a) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx;
b) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente à recta $x = y$;
c) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-xy;
d) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-yz;
e) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao eixo dos zz.

Problema 15. Em relação ao problema anterior, diga

a) no caso dos isomorfismos: quais as transformações lineares inversas;
b) nos outros casos: quais os núcleos e as imagens das transformações.

Problema 16.
Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T_1(x, y) = (x + y, x - y)$ e $T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$.

a) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.
b) Determine $T_1^{-1}(x, y)$, $T_2^{-1}(x, y)$ e $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y)$.
c) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$

Problema 17.
Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-yz, uma reflexão relativamente ao plano-xz e uma rotação no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao eixo dos zz, respectivamente.

a) Determine $T_1^{-1}(x, y, z)$, $T_2^{-1}(x, y, z)$ e $T_3^{-1}(x, y, z)$.
b) Determine $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y, z)$.
c) Verifique que $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1}$