Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Química, Química
1º ano — 2003/04

---

# $8^{\text{a}}$ **Lista de Exercícios**

---

**Problema 1.**

Suponha que $v$ é um vector próprio de uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associado a um valor próprio $\lambda$. Mostre que $v$ também é um vector próprio de $T^{-1}$ e determine o valor próprio de $T^{-1}$ que lhe está associado.

**Problema 2.**

Suponha que $T : V \to V$ tem um vector próprio $v$ associado a um valor próprio $\lambda$. Mostre que $v$ é um vector próprio de $T^2$ associado ao valor próprio $\lambda^2$.

**Problema 3.**

Suponha que $T : V \to V$ é uma transformação linear tal que $T^2$ tem um valor próprio não negativo $\lambda^2$. Mostre que $\lambda$ ou $-\lambda$ é um valor próprio de $T$.

**Problema 4.**

Encontre subespaços invariantes por $T$ , quando $T$ é a seguinte transformação linear:

a) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos $xx$ e a reflexão relativamente à recta $x = y$;
b) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-$xy$ e a reflexão relativamente ao plano-$yz$;
c) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos $xx$ e a projecção no eixo dos $yy$;
d) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-$xy$ e a projecção sobre o plano-$xz$;
e) A rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$;
f) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em torno da origem no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao eixo dos $zz$.

**Problema 5.**

Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ relativa mente à base canónica:

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

**Problema 6.**

Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^3$ relativa mente à base canónica:

$$a)\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

**Problema 7.**

Considere as seguintes matrizes, que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^4$ relativamente à base canónica:

$$a)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

**Problema 8.** Encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios de $A^{25}$, em que $A$ é a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Problema 9.**

Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre a matriz $S$ diagonalizante e escreva explicitamente $S^{-1}AS$.

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Problema 10.**

Em relação ao problema anterior, considere, nos casos diagonalizáveis, que as matrizes representam uma transformação linear relativamente à base canónica. Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando a matriz dada com a matriz diagonal através das matrizes mudança de base.