Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

10^{a} Lista de Exercícios

Problema 1. Decida quais das expressões seguintes definem um produto interno. Em caso negativo indique qual (ou quais) dos axiomas de definição do produto interno não se verifica.

a) $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$ em $\mathbb{R}^2$.
b) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.
c) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$ em $\mathbb{R}^3$.
d) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.
e) $\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_4^2v_4^2$ em $\mathbb{R}^4$.

Problema 2. Utilize os produtos internos usuais em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, para calcular $\|u\|$, $d(u, v)$ e $\text{proj}_v u$ para:

a) $u = (1, -2)$ e $v = (2, 1)$.
b) $u = (0, -2, -1)$ e $v = (3, 4, 0)$.
c) $u = (0, -2, -1, 1)$ e $v = (-3, 2, 4, 4)$

Problema 3. Para que escolha(s) da constante $k \in \mathbb{C}$, os vectores $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, k, 0, i)$ são ortogonais (relativamente ao produto interno usual de $\mathbb{C}$)?

Problema 4. Sejam $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Mostre que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{R}^2$ está definido o produto interno $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$, mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

Problema 5. Calcule o ângulo que o vector $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ faz com os vectores coordenados unitários de $\mathbb{R}^2$ (use o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$).

Problema 6. Utilizando o produto interno usual, verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

a) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
b) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$
c) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

Problema 7. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar numa base ortonormal a base $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Problema 8.

Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u_1} = (0,1,0)$ e $\mathbf{u_2} = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$.

Exprima $\mathbf{w} = (1,2,3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, em que $\mathbf{w_1} \in W$ e $\mathbf{w_2} \in W^{\perp}$.

Problema 9. Sendo P_2 o espaço dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 1 o produto interno considere a operação definida por

$$\langle (a_0 + a_1x + a_2x), (b_0 + b_1x + b_2x) \rangle = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + 3a_1b_1 + a_2b_2$$

a) Mostre que esta operação é um produto interno.
b) Determine a norma do vector $5 + 2x$ em relação a este produto interno.
c) Determine o complemento ortogonal do subespaço gerado por $1 + x + x^2$ e $1 - x$. Quantos vectores com norma 1 existem neste espaço?
d) Determine uma base ortonormal de P_2.

Problema 10. Seja V o espaço linear real das matrizes 2×2.

a) Mostre que a função $\langle A, B \rangle = tr(A^tB)$ define um produto interno em V, onde A^t representa a transposta da matriz A e $tr(A)$ (o traço de A) é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A.
b) Determine o complemento ortogonal em V do subespaço das matrizes diagonais.
c) Determine uma base para o subespaço de V formado pelas matrizes de traço nulo. Indique o complemento ortogonal deste subespaço.

Problema 11.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Encontre bases para os subespaços gerados pelas linhas da matriz, pelas colunas da matriz e para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz A.
b) Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas linhas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A. (Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.)
c) Encontre uma base para o subespaço nulo da matriz A^T. Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas colunas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da ma triz A^T. (Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.)

Problema 12.

Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$ e a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$ respectivamente, quando

a) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual;
b) consideramos $\mathbb{R}^2$ com o seguinte produto interno: $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$.

Problema 13. Considere o produto interno em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\langle v, w \rangle = v^t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} w \ .$$

em que se está a representar um vector de $\mathbb{R}^2$ pelo vector coluna das suas componentes em relação à base canónica.

a) Determine todos os vectores em $\mathbb{R}^2$ ortogonais a $(1, 0)$ relativamente a este produto interno.
b) Determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ relativamente a este produto interno.

Problema 14. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?
b) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -5t$ e $z = 4t$, sendo $t \in \mathbb{R}$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

Problema 15. Determine a distância de $(2, 0, 1)$ ao plano $x - y - z = 3$, considerando $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

Problema 16. Considere um paralelipípedo definido pelos vectores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 1)$.

a) Determine a área do paralelogramo definido por u e v.
b) Determine a altura do paralelipípedo.
c) Determine o volume do paralelipípedo usando a noção de determinante de uma matriz. Use ainda os resultados das alíneas anteriores para confirmar o resultado obtido.

Problema 17. Considere em $\mathbb{C}^3$ o produto interno usual e o subespaço $F = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}$.

a) Determine a matriz A que representa a projecção ortogonal P de $\mathbb{C}^3$ sobre F em relação à base canónica de $\mathbb{C}^3$.
b) Determine o vector de F que está mais próximo de $(0, 1, 1)$.
c) Mostre que A é uma matriz hermiteana.
d) Determine os valores próprios de A.
e) Determine uma matriz unitária U tal que $U^{-1}AU$ seja diagonal.

Problema 18. Seja T uma transformação hermiteana, anti-hermiteana ou unitária de um espaço euclidiano real ou complexo V.

a) Sejam u, v vectores próprios de T associados a valores próprios diferentes. Mostre que u e v são ortogonais.
b) Mostre que se T é diagonalizável, então V admite uma base ortonormal de vectores próprios.

Problema 19. Diga se são simétricas, anti-simétricas, hermiteanas, anti-hermiteanas ou unitárias as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

Problema 20. Seja A uma matriz anti-simétrica, $n \times n$, com n ímpar. Diga qual o valor de $\det(A)$.

Problema 21. Mostre que toda a matriz A se pode escrever na forma $A = R + T$ onde R é simétrica e T anti-simétrica.

Problema 22. Sendo A e B matrizes reais simétricas. Diga qual o valor lógico das afirmações:

a) $A + B$ é simétrica.
b) AB é simétrica.
c) Se $AB = BA$ então AB é simétrica.

Problema 23.

Seja V um espaço euclideano real e seja $T : V \to V$ uma transformação linear sobrejectiva tal que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$.(Estas transformações chamam-se unitárias.)

Mostre que:

a) T é injectiva;
b) $\langle T^{-1}(u), T^{-1}(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
c) $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^{-1}(v)\rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
d) $\|T(v)\| = \|v\|$, para todos os vectores $v \in V$.
e) Mostre que se λ é um valor próprio de T então $|\lambda| = 1$.

Exercícios de escolha múltipla

---

24. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$. Para o produto interno usual, uma base ortogonal para W é

☐ $\{(-1/2, 1/2, 1)\}$
☐ $\{(1, 1, -2)\,,\,(-1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\,,\,(-1/2, 1/2, 1)\}$

---

25. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x\,,\,y\rangle = x^T A\, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna.

a) Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

b) Designe por $\mathrm{proj}_v u$ a projecção ortogonal de u sobre v para o produto interno dado. Então

☐ $\mathrm{proj}_{(1,1)}(1, 0) = \frac{2}{3}(1, 0)$
☐ $\mathrm{proj}_{(1,0)}(1, 1) = \frac{2}{3}(1, 0)$

☐ $\mathrm{proj}_{(1,0)}(1, 1) = (1, 1)$
☐ $\mathrm{proj}_{(1,1)}(0, 1) = \frac{1}{3}(1, 1)$
