Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

2^{a} **Lista de Exercícios**

Problema 1. Considere as seguintes matrizes aumentadas em escada de linhas com pivots iguais a um. Resolva cada um dos respectivos sistemas de equações lineares.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 7y & + & 4z & = & 10 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rcc} z_1 - z_2 & = & 1-2i \\ (1+i)z_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Problema 3. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & -3 \\ & & & & az & = & 0 \\ x & - & 5y & - & 5z & = & b \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & & & \beta z & = & 2 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & 4z & = & 4 \\ & & \alpha y & + & 2z & = & \beta \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & - & 2z & = & 0 \\ & & cy & + & 4z & = & d \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & & & z & = & 2 \\ & & & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

Problema 4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontre matrizes elementares tais que $E_k ... E_1 A = I$.
b) Escreva A^{-1} como um produto de k matrizes elementares.
c) Escreva A como um produto de k matrizes.

Problema 5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1 ... E_k R$, onde as matrizes $E_j, j = 1, ..., k$ são matrizes elementares e R uma matriz em escada de linhas.

Problema 6. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas a, b, c, d, e, f, g, h reais.

Problema 7. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 8. Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$a) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

em que k_1, k_2, k_3, k_4, k são reais.

Problema 9. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$ invertíveis, então AB também é invertível.

Exercícios de escolha múltipla

---

10. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para A uma matriz quadrada e b um vector não nulo.

☐ Se x é solução do sistema $Au = 0$ e y solução do sistema $Au = b$, então $(x - y)$ é solução de $Au = b$.

☐ Se x é solução do sistema $Au = 0$ e y solução do sistema $Au = b$, então $(x - y)$ é solução de $Au = -b$.

☐ Se x é uma solução de $Au = 0$ então necessáriamente $x = 0$.

☐ Se A não é invertível então $x = 0$ é a única solução de $Au = 0$.

---

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de A. Então a solução do sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é

☐ $(3, 4, 0)$. ☐ $(4, 4, 0)$. ☐ $(4, 9, 1)$. ☐ $(2, 9, 1)$.

Exercício resolvido

12. Faça a discussão do sistema homogéneo $A_\alpha = 0$ em termos do parâmetro α, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Resolução: Aplique-se o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&1&-1&1\\4&4&-\alpha^2&\alpha^2\\2&2&-2&\alpha\end{bmatrix}\underset{L1\leftrightarrow L2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&1&1\\4&4&-\alpha^2&\alpha^2\\2&2&-2&\alpha\end{bmatrix}\underset{L3-4L1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&-(\alpha^2-4)&\alpha^2-4\\2&2&-2&\alpha\end{bmatrix}$$

$$\underset{L4-2L1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&-(\alpha^2-4)&\alpha^2-4\\0&0&0&\alpha-2\end{bmatrix}.$$

Note que a característica de A_α é :

$$\operatorname{car}(A_\alpha)=\begin{cases}2 & \text{se} \quad \alpha=2\\ 3 & \text{se} \quad \alpha=-2\\ 4 & \text{se} \quad \alpha\neq\pm 2\end{cases}$$

Logo o sistema tem exclusivamente a solução nula para $\alpha \neq \pm 2$.
O sistema pode escrever-se:

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0\\ y + z + w = 0\\ -(\alpha^2-4)z + (\alpha^2-4)w = 0\\ (\alpha-2)w = 0.\end{cases} \tag{1}$$

Quando $\alpha = 2$ o sistema () reduz-se às duas primeiras equações. Resolvendo a segunda equação obtemos $y = -z - w$ e substituindo na primera equação vem $x = 2z$. Logo a solução geral do sistema (para $\alpha = 2$) é:

$$\{(x,y,z,w):\ y=-z-w \wedge x=2z \wedge z\in\mathbb{R}\wedge w\in\mathbb{R}\} = \\ = \{(2z,-z-w,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}$$

Quando $\alpha = -2$ o sistema reduz-se a

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0\\ y + z + w = 0\\ -4w = 0.\end{cases}$$

Logo, da última equação vem $w = 0$, que substituido nas duas primeiras equações dá $y = -z$ e $x = 2z$. A solução geral do sistema (para $\alpha = -2$) é:

$$\{(x,y,z,w):\ y=-z\wedge x=2z\wedge z\in\mathbb{R}\}=\{(2z,-z,z,0): z\in\mathbb{R}\}$$

Concluindo:

O sistema é sempre possível pois é um sistema homogéneo.

Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -2$ o sistema é determinado com solução única $(0,0,0,0)$.

Se $\alpha = 2$ o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2 e solução geral:

$$\{(2z, -z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -2$ o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 1 e solução geral:

$$\{(2z, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}.$$