Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2004/05

5ª Lista de Exercícios

Problema 1. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 3)$ e $u_4 = (1, 2, 3, 4)$.
b) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ e $u_4 = (1, 2, 2)$.
c) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1 + t + t^2$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.
d) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^3$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.

Problema 2.

Determine a dimensão e uma base para o espaço solução de cada um dos sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2x - y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y + z + t &= 0 \\ 5x - y + z - t &= 0 \end{cases}$

Problema 3.

Indique, justificando, qual a dimensão dos seguintes espaços lineares, e indique também uma base para cada um deles.

a) $\mathrm{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.
b) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e $c = 2a$, sendo a, b, c reais.
c) $\mathrm{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2y + 5z - w = 0\}$.
d) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.
e) O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais.
f) $L(S)$, onde S é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

Problema 4.

Seja V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

a) Diga qual a dimensão de V e indique uma base ordenada para V. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.
b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se S é uma base para V.
c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base para esse espaço.
d) Seja T o subconjunto de todos os polinómios de V que se anulam em 0. Diga se T é um subespaço linear de V. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

Problema 5.

Considere os seguintes pares de subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$, e encontre, em cada caso, a dimensão e uma base para $U \cap W$ e para $U + W$.

a) $U = L(\{(1,0,2,0)\})$ e
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}$.
b) $U = L(\{(1,0,-1,0),(0,1,1,0)\})$ e
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}$ e
c) $U = L(\{(0,0,1,0),(-2,0,0,-2)\})$
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z - w = 0 \ \wedge \ x - w = 0\}$

Verifique que $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$ nos três casos considerados.

Problema 6.

Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Problema 7.

Sempre que B pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz A, escrever B como combinação linear das colunas de A.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Problema 8.

Encontrar os subconjuntos que formam bases para os espaços gerados pelos conjuntos de vectores seguintes:

a) $\{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

Problema 9.

Se $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos, indique a dimensão e uma base para $\mathbb{C}^3$

a) como espaço linear complexo. *b*) como espaço linear real.

Problema 10.

Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2

Problema 11.

Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema de equações lineares não-homogéneo $AX = B$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A$\vdots$B)	3	3	1	2	3	0	2

Problema 12.

Indique a dimensão do núcleo de cada uma das matrizes do exercício anterior e determine o número de variáveis livres que entram na solução geral do correspondente sistema de equações lineares homogéneo $AX = O$.

Problema 13.

Encontre a matriz mudança de base, da base canónica de $\mathbb{R}^2$ para a base ordenada $B = ((2, -2), (3, 4))$, e represente o vector $w = (2, 2)$ na base B.

Problema 14.

Seja $B = (u_1, u_2, u_3)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, onde $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, e $u_3 = (1, 1, 1)$. Seja $v = u_1 + 2u_2 - u_3$ um vector de $\mathbb{R}^3$ representado na base B. Represente v na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 15.

Seja P o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2. Encontre a matriz mudança de base, da base canónica de P para a base ordenada $B = (1 - t, t^2, 1 + t + t^2)$ de P, e represente o vector $w = 2 - 3t + t^2$ na base B.

Exercícios de escolha múltipla

---

16. Sejam u, v, w vectores linearmente independentes de um espaço linear real U. Então:

☐ A dimensão de U é 3.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u + v\})$ é 4.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u + v\})$ é igual à dimensão de $L(\{u, v, w\})$.
☐ A dimensão de U é inferior a 3.

---

17. Seja A uma matriz $n \times p$ tal que a dimensão do núcleo de A é 2, a dimensão do núcleo de A^T é 1, e a dimensão do espaço das linhas de A é 2. Então

☐ $n = 4$ e $p = 5$. ☐ $n = 5$ e $p = 4$. ☐ $n = 3$ e $p = 4$. ☐ $n = 4$ e $p = 3$.

---

18. Considere as bases ordenadas $B_1 = (1 + t, t)$ e $B_2 = (t - 1, t + 2)$ do espaço linear real dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 1. Então a matriz de mudança de base, da base B_1 para a base B_2 é

☐ $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
