Álgebra Linear

Exercícios resolvidos

Indique, justificando (com breves argumentos ou contra exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

a) *Um sistema de 4 equações a 3 incógnitas é sempre impossível.*

Resposta: A afirmação é falsa. Por exemplo o sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

é um sistema de quatro equações a três incógnitas que admite a solução $(1, 0, 0)$.

b) *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

é invertível para qualquer valor do parâmetro real k.

Resposta: A afirmação é verdadeira. Uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu determinante for diferente de zero. Temos $\det A = k^2+1$. Como a equação $k^2 + 1 = 0$ não tem soluções reais, concluímos que A é invertível para qualquer valor do parâmetro real k.

c) *Uma matriz quadrada de ordem n que seja invertível tem todas as entradas da diagonal principal não nulas.*

Resposta: A afirmação é falsa. Por exemplo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível pois $\det A = 1 \neq 0$.

d) *Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n e a característica de A é menor do que n então também a característica de AB é menor do que n.*

Resposta: A afirmação é verdadeira. Uma matriz quadrada de ordem n tem determinante 0 se e só se tiver característica menor do que n.

Como a característica de A é menor do que n então det$A = 0$. Como, pelas propriedades dos determinantes det (AB) =det$A$ det$B$, concluímos que $det(AB) = 0$ e portanto a matriz AB tem característica menor do que n.

e) *Uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{-1} = A^t$ tem determinante igual a 1 ou -1.*

Resposta: A afirmação é verdadeira. Com efeito, como $A^{-1} = A^t$, temos $A^tA = I_n$ donde det $A^tA = 1$ e logo detA^t det A=1. Como, pelas propriedades dos determinantes, det $A =$ det A^t, concluímos que $(\det A)^2 = 1$ e logo A tem determinante igual a 1 ou -1.

f) *Seja I a matriz identidade 2×2 e $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.*

i) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ a matriz $(A - \alpha I)$ não é invertível.

ii) Use o resultado da alínea anterior para indicar, justificando, um valor de α para o qual o sistema $(A - \alpha I)X = 0$ admite uma solução não nula. Além disso, determine uma tal solução.

Resposta: i) Como uma matriz quadrada B não é invertível se e só se det $B = 0$ basta determinar os valores de α para os quais det $(A - \alpha I) = 0$.

A matriz $A - \alpha I$ é a matriz $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e det $(A - \alpha I) = \alpha^2 + 1$. Como $\alpha^2 + 1 = 0 \iff \alpha^2 = -1 \iff \alpha = i$ ou $\alpha = -i$, os valores de α para os quais $A - \alpha I$ não é invertível são i e $-i$.

b) O sistema homogneo, de duas equações a duas incógnitas, representado por $(A - \alpha I)X = 0$ tem sempre a solução nula e terá mais do que uma solução se e só se a matriz $A - \alpha I$ não for invertível, ou seja, pela alínea i), se e só se $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$.

Para $\alpha = i$ o sistema reduz-se a $-ix + y = 0$ que tem, por exemplo a solução $x = 1$ e $y = i$.

g) *Se três vectores são linearmente dependentes, um deles é múltiplo de um dos outros.*

Resposta: A afirmação é falsa. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$ são linearmente dependentes pois $v_3 = v_1 + v_2$, mas nenhum destes vectores é múltiplo de um dos outros.

h) *A intersecção de dois subespaços vectoriais é sempre um subespaço vectorial.*

Resposta: A afirmação é verdadeira. Sejam U, W dois subespaços vectoriais do espaço vectorial V sobre o corpo K.
Temos que, como U e W são subespaços vectoriais, O_V pertence a U e a W e logo a $U \cap W$, pelo que $U \cap W$ é não vazio.
Além disso, $U \cap W$ é fechado para a soma. Com efeito se dois vectores s, t pertencem a $U \cap W$ então por definição de intersecção de dois conjuntos, $s, t \in U$ e $s, t \in W$. Como U e W são fechados para a soma por serem espaços vectoriais, $s + t \in U$ e $s + t \in W$, pelo que, de novo por definição de intersecção de dois conjuntos, $s + t \in U \cap W$.
Também $U \cap W$ é fechado para a multiplicação por escalares. Dados $\lambda \in K$ e $s \in U \cap W$, s pertence a U e a W e logo também λs pertence a U e a W, pois U e W sendo espaços vectoriais sobre K são fechados para a multiplicação por escalares. De novo concluímos que $\lambda \in U \cap W$.
Logo $U \cap W$,sendo não vazio, fechado para a soma e para a multiplicação por escalares é um subespaço vectorial.