Álgebra Linear

Cursos: MEEC, MAmb, LMat, LQ, LEIC-A, MEQ
2ºS — 2007/08

5ª Lista: Valores e vectores próprios. Diagonalização de matrizes

---

1. Diga quais dos vectores seguintes são vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.
a) $(0, 2, 2)$ *b*) $(0, 5, 0)$ *c*) $(0, 0, 0)$ *d*) $(-1, -1, 2)$ *e*) $(-2, -2, 2)$

2. Verifique se $\lambda = 3$ é ou não um valor próprio de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, e em caso afirmativo determine um vector próprio associado.

3. Sem efectuar quaisquer cálculos determine um valor próprio de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e dois vectores próprios linearmente independentes.

4. Suponha que v é um vector próprio de uma matriz invertível M. Mostre que v também é um vector próprio de M^{-1} e determine o valor próprio de M^{-1} que lhe está associado.

5. Suponha que a matriz M tem um vector próprio v associado a um valor próprio λ. Mostre que v é um vector próprio de M^2 associado ao valor próprio λ^2.

6. Para cada uma das matrizes seguintes encontre os valores próprios e uma base para cada espaço próprio.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ *e*) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f*) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Mostre que para uma matriz A, 2×2, a equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

onde $\mathrm{tr}(A)$ designa o traço de A.

Diga ainda qual o valor de $\mathrm{tr}(A)$ e $\det(A)$ se $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 8$ são os valores próprios de uma matriz A, 2×2.

8. Seja A uma matriz quadrada cuja soma de cada uma das suas linhas é constante igual a k. Mostre que k é um valor próprio de A. (Sugestão: determine um vector próprio).

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.05 \\ 0.03 & 0.95 \end{bmatrix}$ cuja soma por colunas é constante, e o vector $x_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$.

(a) Use o problema anterior e propriedades do determinante para justificar que $\lambda = 1$ é um valor próprio de A. Mostre ainda que $\lambda = 0.92$ é também um valor próprio de A.

(b) Use a alínea anterior para mostrar que $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios, indicando quais os valores próprios associados.

(c) Dada a sucessão $x_{k+1} = Ax_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, mostre que pode escrever $x_{k+1} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2(0.92)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (Sugestão: escreva x_0 como combinação linear de u e v e use o facto de u, v serem vectores próprios de A.

(d) Use os resultados das alíneas anteriores para determinar o limite: $\lim_{k\to\infty} x_{k+1}$.

10. Um dos teoremas fundamentais da Álgebra Linear é o teorema de Cayley-Hamilton que diz que uma matriz quadrada A, $n \times n$, verifica a sua equação característica. Isto é, se

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

é a equação característica de A, então também se verifica

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0.$$

Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

11. Determine quais das matrizes são diagonalizáveis. Em caso afirmativo encontre a matriz S que diagonaliza a matriz dada A (ou seja tal que $S^{-1}AS$ é diagonal).

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e)\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.
(b) Use a alínea anterior para calcular A^{25} e encontrar os seus valores próprios e uma base para cada espaço próprio.

13. Para uma matriz quadrada real A, $n \times n$, diga, justificando se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) Se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A então A é diagonalizável.
(b) A é diagonalizável se tem n vectores próprios.
(c) A é diagonalizável se e só se tem n valores próprios contando as suas multiplicidades.
(d) Se A é diagonalizável então tem n valores próprios distintos.
(e) Se A tem n valores próprios distintos então é diagonalizável.
(f) Se A é diagonalizável então é invertível.
(g) Se $n = 3$ e A tem dois valores próprios tal que a dimensão de cada espaço próprio é 1 então A é diagonalizável.
(h) A é uma matriz 5×5 com dois valores próprios para os quais a dimensão de um espaço próprio é 3 e do outro é 2. Então A é diagonalizável.

14. Um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um subespaço invariante para uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se a imagem de S por F está contida em S, isto é $F(S) \subseteq S$.

Considere a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = Ax$, onde A é uma certa matriz real $n \times n$.

(a) Mostre que os subespaços próprios de valores próprios reais são subespaços invariantes.

(b) Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine subespaços invariantes para F.

(c) Verifique que a função F da alínea anterior representa uma reflexão em relação à recta $y = x$. Represente geometricamente os subespaços invariantes que encontrou na alínea anterior, e diga se existem outros subespaços invariantes para F.

15. Seja A uma matriz 3×3 que verifica

$$N(A - 2I) = \{0\}, \quad N(A) \neq \{0\} \quad \text{e} \quad \dim N(A - 3I) = 1.$$

Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

(a) 2 não é valor próprio de A.
(b) A não é invertível.
(c) Zero não é um valor próprio de A.
(d) 3 é um valor próprio de A cuja multiplicidade algébrica é igual à multiplicidade geométrica.
(e) Se $\dim N(A) = 2$ então a matriz A é semelhante à matriz diagonal $\operatorname{diag}(0, 0, 3)$.
(f) A matriz $A - 2I$ é invertível.

Exercícios de escolha múltipla

---

16. Sejam u, v e w vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e A uma matriz 3×3 tal que $Au = 2u$, $Av = 0$ e $Aw = w$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $B = (u, v, w)$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ A matriz A não é invertível.
☐ A matriz A não é diagonalizável.
☐ $\lambda = 1$ não é um valor próprio de A.

---

17. Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz real tal que $a_{11} + a_{22} = 0$ e $\det(A) = 1$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Zero é um valor próprio de A.
☐ O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
☐ A matriz A não tem valores próprios complexos.
☐ 1 e -1 são valores próprios de A.