Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra Linear

Eng. Electrotécnica e de Computadores
1º Semestre — 3 Jan. 2007

BBABAB

Nome:____
Número:____________________________ Curso:____________

Indique qual ou quais dos testes entrega:

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐

2º Teste ☐

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
T1-10 a)	
T1-10 b)	
T1-11 a)	
T1-11 b)	
T2-22 a)	
T2-22 b)	
T2-23 a)	
T2-23 b)	

A preencher pelo docente

	Pergunta	Classificação	Cotação
	10 a)		0.5
	10 b)		0.5
	11 a)		1
	11 b)		1.5
	22 a)		1
	22 b)		1
	23 a)		0.5
	23 b)		0.5
Total P			
EM-Cert.			
EM-Erra.			
T1-8			1.2
T1-9			0.5
T2-19			0.9
T2-20			0.8
T2-21			0.4

Registo:	**Nota:**

Leia as instruções na página seguinte

Instruções

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 11

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 12 a 23.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

Cotações: Perguntas de escolha múltipla: Certa: **0.7 val.** Errada: - **0.2val.**

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla e as de completar devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** (página anterior) está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu. Certifique-se ainda que assinalou qual ou quais dos testes respondeu.

Início do 1^{o} Teste

1. Seja A uma matriz tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações: **[0.7]**

I. O sistema $Ax = b$ é possível e determinado.
II. O sistema $Ax = b$ tem como única solução $x = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$.
III. A característica da matriz aumentada $[A|b]$ é igual a 4.
IV. Se x_0 é solução de $Ax = 0$ e y_0 solução de $Ax = b$ então $x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$.

A lista <u>completa</u> de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I, II e IV ☐ II e III ☐ II e IV

---

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira **[0.7]**

☐ A é invertível para qualquer α
☐ $\det(A) = 0$ para qualquer α.
☐ Existe pelo menos um valor de α para o qual $\dim N(A) = 3$.
☐ Existe pelo menos um valor de α para o qual $\dim EC(A) = 3$.

---

3. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Considere a seguinte lista de afirmações: **[0.7]**

I. Se $A^2 = A$ então $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.
II. Se $\det(A) \neq 0$ então A não tem duas linhas iguais.
III. Se A tem zeros na diagonal principal então $\det(A) = 0$.
IV. Se as colunas de A são linearmente independentes então A não tem duas linhas iguais.

A lista <u>completa</u> de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I, II e IV ☐ I, II e III ☐ I e III

---

4. Sejam A e B duas matrizes 3×3 tais que $\det(2AB) = 96$ e $\det\left(\left(AB^{-1}\right)^3\right) = 27$. Sabendo que $\det(B) > 0$, então: **[0.7]**

☐ $\det(A) = 6$ e $\det(B) = 2$ ☐ $\det(A) = 3$ e $\det(B) = 4$
☐ $\det(A) = 3$ e $\det(B) = 1$ ☐ $\det(A) = \frac{1}{2}$ e $\det(B) = 6$

---

5. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ e as afirmações seguintes: **[0.7]**

I. Os vectores $(2,4,1)$ e $(3,4,3)$ são linearmente independentes.
II. Os vectores $(1,2,0),(6,12,0)$ e $(1,1,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
III. Os vectores $(\pi,1,0),(1,\frac{1}{5},3),(-3,1,1)$ e $(0,32,2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
IV. O vector $(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ é combinação linear dos vectores $(1,1,1)$ e $(0,2,0)$.

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ I e IV ☐ I e III ☐ II e IV ☐ II e III e IV

---

6. Seja $B=(v_1,v_2,v_3)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que **[0.7]**

$$v_1=(0,1,0) \qquad v_2=(1,2,1) \qquad v_3=(-1,0,0)\ .$$

Considere as afirmações seguintes:

I. O vector $v_B=(0,2,1)$ é o vector das coordenadas de $v=(1,4,2)$ na base de B.
II. O vector das coordenadas de v_3 na base B é $(v_3)_B=(1,0,1)$.
III. O vector das coordenadas de $w=(5,0,0)$ na base B é $w_B=(0,0,-5)$.
IV. O vector das coordenadas de $u=v_1+v_2+v_3$ na base B é $u_B=(0,3,1)$.

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ I, II e III ☐ I e III ☐ II e IV ☐ I e IV

---

7. Indique qual dos conjuntos seguinte é um subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3. **[0.7]**

☐ $V=\mathrm{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,1,-1,0)\}$
☐ $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : z+2w=0,\ y-x=1$ e $x=0\}$
☐ $S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y-x+z+2w=0\}$
☐ $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 :\ x=y=z=w\}$

---

8. Seja A uma matriz 20×10 tal que $\dim EL(A)=5$. Complete de forma a obter afirmações verdadeiras:

a) $\dim N(A^T)=$ ____________________ **[0.4]**
b) O núcleo de A é um subespaço de ____________________ **[0.4]**
c) O sistema homogéneo $Ax=0$ tem grau de indeterminação:____________________ **[0.4]**

9. Complete a matriz **[0.4]**

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & \dots\\ 0 & 1 & \dots\\ 1 & \dots & \dots\end{bmatrix}$$

por forma a que $\dim EC(A)=2$ e $(1,-1,1)$ pertença ao núcleo de A.

10. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$S = \operatorname{Span}\{(1,1,0),(0,2,1),(1,-1,-1)\}$$

a) Determine uma base para S. **[0.5]**

b) Complete a base obtida na alínea anterior por forma a obter uma base de $\mathbb{R}^3$. **[0.5]**

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 4 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é invertível e calcule a entrada $(1,2)$ da matriz inversa, no(s) caso(s) em que A é invertível. **[1]**

b) Faça a discussão do sistema $Ax = b$ em termos dos parâmetros reais α e β indicando em cada caso a solução geral do sistema. **[1.5]**

$\boxed{\textbf{FIM do } 1^{\text{o}} \textbf{ Teste}}$

Início do 2º Teste

12. Seja A uma matriz de característica 1 e $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$ o seu polinómio característico. Considere a seguinte lista de afirmações: **[0.7]**

I. $\det(A - I) = 0$.
II. A matriz A é diagonalizável.
III. A matriz A é invertível.
IV. A multiplicidade geométrica do valor próprio zero é 1.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ III e IV ☐ I e IV ☐ I, II e III ☐ I e II

---

13. Considere a matriz real **[0.7]**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix},$$

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira

☐ Se $(-3, 2)$ é vector próprio de A então $3\beta = 2\alpha$.
☐ Se $\alpha = \beta = 0$, então zero não é valor próprio de A.
☐ Se $(2, 2)$ é vector próprio de A então $\alpha + \beta = 5$.
☐ Se $\alpha = 0$, então β não é valor próprio de A.

---

14. Seja S um plano definido por $ax + by + cz = 0$, com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, e $P = (1, 1, 1)$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[0.7]**

☐ Se P pertence ao plano então $a - b - c = 0$.
☐ A distância de P a S é $|a + b + c|$.
☐ O vector do plano mais próximo de P é: $k(a, b, c)$ com $k = a + b + c$.
☐ O vector $(1 - a, 1 - b, 1 - c)$ pertence ao complemento ortogonal de S.

---

15. Considere um plano P e um triângulo em P de vértices $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_2 = (0, 1, 1)$ e $V_3 = (0, 0, 0)$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira. **[0.7]**

☐ A recta $\{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ é perpendicular ao plano P.
☐ O triângulo não é equilátero.
☐ A altura da pirâmide triangular de vértices V_1, V_2, V_3 e $V = (1, \sqrt{3}, 1)$ é igual a 1.
☐ A recta $\{(x, -x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ está contida no plano P.

---

16. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[0.7]**

☐ O complemento ortogonal ao espaço das linhas de A é $\{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
☐ O complemento ortogonal ao núcleo de A é $\{(x, 4x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
☐ O complemento ortogonal ao espaço das colunas de A é $\{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.
☐ O complemento ortogonal ao núcleo de A^T é $\{(x, 4x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

---

17. Seja A uma matriz 3×2 de característica máxima e tal que as entradas da primeira coluna de A são todas iguais a 1. Considere a lista de afirmações seguinte, onde b designa um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^2$. **[0.7]**

I. O sistema $Ax = b$ tem solução única de mínimos quadrados.
II. Se u e v são vectores de $\mathbb{R}^2$ que verificam $\|b - Au\| > \|b - Av\|$ então u pode ser uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$.
III. Se o sistema $Ax = b$ tem solução única de mínimos quadrados então A é invertível.
IV. Se $b - Au$ pertence ao espaço das colunas de A, então u é uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I, II e IV ☐ I e IV ☐ I, III e IV ☐ I

---

18. Seja **[0.7]**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ relativamente às bases canónicas. Considere as afirmações seguintes:

I. A imagem de T é $\mathbb{R}^2$.
II. A transformação linear T é um isomorfismo.
III. $T(1, -1, 1) = (1, -1)$
IV. O núcleo de T é uma recta

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ III e IV ☐ II e III ☐ III ☐ I, III e IV

---

19. Seja P_2 o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação linear $T : P_2 \to P_2$ relativamente à base ordenada $(1+x, x^2-x, x)$ no espaço de partida e à base canónica $(1, x, x^2)$ no espaço de chegada.

Complete por forma a obter afirmações verdadeiras:

a) $T(1 + 3x + 2x^2) =$ ______________ **[0.5]**

b) $\{4 - 2x^2, -2 + x + x^2\}$________ base para o contradomínio de T. **[0.4]**

20. Complete por forma a obter afirmações verdadeiras:

a) $A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 3 \\ -1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$ é anti-simétrica. **[0.4]**

b) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$ é ortogonal. **[0.4]**

21. Complete as matrizes A e b abaixo por forma a que se verifique: **[0.4]**

- para determinar o polinómio de grau dois cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos da tabela

x	1	2	-1	-2
y	1	4	3	-2

determina-se uma solução de mínimos quadrados para o sistema $Au = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} \cdots \\ 4 \\ \cdots \\ -2 \end{bmatrix}$$

22. Seja $\lambda = -1$ um valor próprio de multiplicidade geométrica igual a 2 de $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & \alpha \\ 6 & -12 & \beta \end{bmatrix}$.

Resolva, justificando cuidadosamente, as questões seguintes.

a) Determine α e β e uma base para o espaço próprio $E(-1)$. **[1]**

b) Use os valores de α e β da alínea anterior para determinar todos os valores próprios de A e justificar se A é ou não diagonalizável. (Sugestão: Calcule o traço ou o determinante de A para resolver a questão). **[1]**
Nota: Se não resolveu a alínea anterior considere $\alpha = 1$ e determine um valor de β por forma a que A tenha um valor próprio distinto de -1. Resolva em seguida a questão.

23. Sejam A e B matrizes 6×4 tais que $A^T B$ é invertível.

a) Mostre que o complemento ortogonal ao espaço das linhas de B é $\{0\}$. **[0.5]**

b) Mostre que zero é um valor próprio de BA^T. (Sugestão: estude BA^T quanto à invertibilidade). **[0.5]**