Equações quadráticas

Pretende-se identificar os lugares geométricos dos pontos do plano, ou do espaço tridimensional que verificam equações quadráticas. No plano estas equações definem *cónicas* enquanto que no espaço definem superfícies designadas habitualmente por *quádricas*. Referimo-nos a equações da forma que se segue.

- Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + j = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

- Para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j = 0, \quad a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

No caso geral, as equações acima são compostas por uma parte quadrática, uma parte linear e uma parte constante. Nomeadamente,

$$\underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz}_{\text{termo quadrático}} + \underbrace{gx + hy + iz}_{\text{termo linear}} + j = 0.$$

À parte quadrática destas equações chamamos *forma quadrática*. Estas formas quadráticas podem escrever-se na forma matricial $q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ onde A é uma matriz simétrica real e $\mathbf{x}$ o vetor coluna das coordenadas. Isto é,

- para $q_A(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ temos

$$ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

- para $q_A(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ temos

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

No quadro seguinte apresentamos alguns exemplos.

Equação quadrática	$q_A(\mathbf{x})$	Matriz A
$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36y = 0$	$8x^2 - 4xy + 5y^2$	$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
$xy - y + 2 = 0$	xy	$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$
$x^2 + 2yz + 2y^2 - 3z^2 - 12 = 0$	$x^2 + 2yz + 2y^2 - 3z^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

As equações (1.1) e (1.2) podem assim escrever-se na forma

$$\underbrace{q_A(\mathbf{x})}_{\text{quadrática}} + \underbrace{\mathbf{k}^T\mathbf{x}}_{\text{linear}} + j = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = 0, \tag{1.3}$$

onde $\mathbf{k}$ é um vetor (coluna) constante.

Na identificação do lugar geométrico de pontos que verificam equações quadráticas é fundamental o resultado:

- qualquer matriz A, $n \times n$, real e simétrica é diagonalizável por meio de uma matriz ortogonal P. Ou seja,

  $$A = PDP^T$$

  com $PP^T = I$ e D diagonal. Sabemos ainda que os vetores coluna de P formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ constituída por vetores próprios de A, e as entradas na diagonal de D são os valores próprios de A.

Assim, aplicando este resultado à equação (1.3), obtemos:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = 0.$$

Efectuando na equação anterior a mudança de variáveis definida por $P^T\mathbf{x} = \mathbf{u}$ (equivalentemente $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$, já que $(P^T)^{-1} = P$), temos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = 0 \iff \mathbf{u}^T D\mathbf{u} + \widetilde{\mathbf{k}}^T\mathbf{u} + j = 0,$$

onde $\widetilde{\mathbf{k}}^T = \mathbf{k}^T P$ e $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A. Note-se que nas novas variáveis a forma quadrática associada à equação (i.e. $q_D(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T D\mathbf{u}$) tem uma expressão bastante simples:

$$q_D(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T D\mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2.$$

A matriz P tem nas colunas vetores próprios de A de norma igual a 1, e é a matriz que realiza a mudança da base formada pelos vetores próprios (definida pelas colunas de P) para a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Assim, a mudança de variáveis $P^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ aplica direções definidas pelos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ em direções definidas por vetores próprios de A. Estas direções são designadas por *direções principais*. Enunciamos a proposição seguinte.

Proposição 1.1. **(Redução a eixos principais)**
Efectuando a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, onde P é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz $(n \times n)$ real e simétrica A, a forma quadrática $q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é igual a $q_D(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T D\mathbf{u}$, onde $D = P^T AP$ é uma matriz diagonal. Isto é:

$$q_A(\mathbf{x}) = q_D(\mathbf{u}) = \lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2,$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A.

Exemplo 1.1. Considere-se a equação

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0. \tag{1.4}$$

A forma quadrática associada a esta equação é $q_A(x, y) = 8x^2 - 4xy + 5y^2$, ou seja:

$$q_A(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem valores próprios $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, quaisquer vetores próprios associados a λ_1 e λ_2 são ortogonais. Tome-se, por exemplo, para vetor próprio associado a λ_1 o vetor $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, e para vetor próprio associado a λ_2 o vetor $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$ (verifique que estes vetores são vetores próprios de A). Uma matriz que tenha nas colunas $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ diagonaliza A, porém não é uma matriz ortogonal já que estes vectores não têm norma 1. Se se pretende uma matriz que diagonalize ortogonalmente A então devemos normalizar estes vetores próprios. Por exemplo, uma matriz P que diagonaliza ortogonalmente A é:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

A matriz P tem determinante igual a 1, e representa por isso uma rotação dos eixos coordenados definida por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Além disso, P aplica os vectores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, da base canónica de $\mathbb{R}^2$, respectivamente nos vectores $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$ e $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$.

A mudança de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ transforma a equação dada na equação:

$$q_D(\mathbf{u}) = 4\,u_1^2 + 9\,u_2^2 = 36 \iff \frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4} = 1.$$

Em conclusão, a cónica é uma elipse centrada relativamente ao sistema de eixos coordenados u_1, u_2 (que têm a direcção dos vectores próprios da matriz A) e com semieixos medindo 3 e 2. O sistema de eixos u_1, u_2 é obtido por rotação do sistema de eixos x, y, rotação esta definida pela matriz P. Na Figura 1.1 é apresentado o gráfico da cónica.

♦

A equação do exemplo anterior não possui termos que envolvem $\mathbf{x}$ pois é uma equação do tipo

$$q_A(\mathbf{x}) + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = 0,$$

com $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Se a essa equação adicionássemos um termo $\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ com $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ poderíamos identificar a cónica através de um processo que se costuma designar por ”completar os quadrados”. No exemplo seguinte mostramos como proceder para este efeito.

Exemplo 1.2. Considere a modificação seguinte da equação do Exemplo 1.1:

$$8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - \frac{64}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{52}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0. \tag{1.6}$$

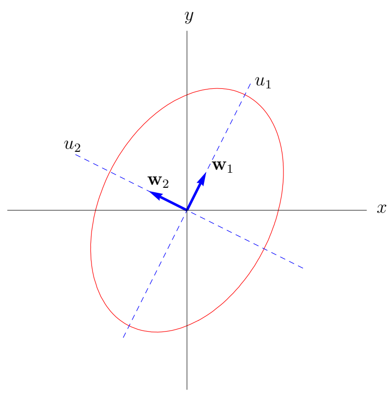


Figura 1.1: Elipse (Exemplo 1.1) cujos eixos têm as direções dos vetores próprios unitários $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ da matriz A.

Diagonalizando da forma quadrática usando a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ do exemplo anterior, (a matriz P é dada em (1.5)), a equação (1.6) reduz-se a:

$$0 = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - \frac{64}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{52}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 4\,u_1^2 + 9\,u_2^2 + 8u_1 + 36u_2 + 4,$$

já que, $x_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2u_2}{\sqrt{5}}$ e $x_2 = \dfrac{2u_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{u_2}{\sqrt{5}}$. Completemos agora os quadrados:

$$\begin{aligned} 4u_1^2 + 8u_1 &= 4\left(u_1^2 + 2u_1\right) = 4\left(u_1^2 + 2u_1 + 1 - 1\right) = 4\left(u_1 + 1\right)^2 - 4 \\ 9u_2^2 + 36u_2 &= 9\left(u_2^2 + 4u_2\right) = 9\left(y_2^2 + 4y_2 + 4 - 4\right) = 9\left(u_2 + 2\right)^2 - 36. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 4\,u_1^2 + 9\,u_2^2 + 8u_1 + 36u_2 + 4 = 0 &\iff 4\left(u_1 + 1\right)^2 - 4 + 9\left(u_2 + 2\right)^2 - 36 + 4 = 0 \\ &\iff 4\left(u_1 + 1\right)^2 + 9\left(u_2 + 2\right)^2 = 36 \\ &\iff 4y_1^2 + 9y_2^2 = 36 \end{aligned}$$

Ou seja, a cónica definida por (1.6) é obtida da cónica dada por (1.4) por uma translação definida pelo vetor $\mathbf{a} = (-1, -2)$. Na Figura 1.2 são ilustradas estas duas elipses.

♦

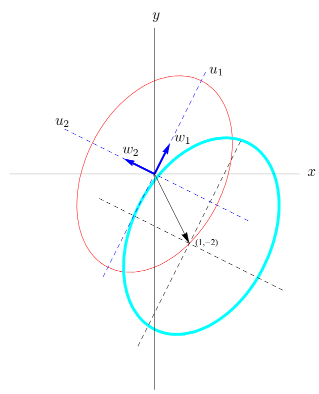


Figura 1.2: Elipse do Exemplo 1.2 como translação da elipse do Exemplo 1.1.

Classificação de cónicas

Usando procedimentos análogos ao dos exemplos anteriores, por meio de uma mudança de coordenadas a equação quadrática em duas variáveis pode sempre levar-se a uma equação na forma reduzida. Esta equação define uma cónica que pode ser degenerada. As equações reduzidas das cónicas *não degeneradas* (a menos de uma permutação de x e y) são:

$$\begin{array}{rcl} \textit{Circunferência:} & \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2}=1 & \rightsquigarrow D=\frac{1}{k^2}I. \\ \textit{Elipse:} & \frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{l^2}=1 & \rightsquigarrow D=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{k^2},\frac{1}{l^2}\right). \\ \textit{Hipérbole:} & \frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{l^2}=1 & \rightsquigarrow D=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{k^2},-\frac{1}{l^2}\right). \\ \textit{Parábola:} & y^2=px & \rightsquigarrow D=\operatorname{diag}\left(0,1\right). \end{array}$$

As *cónicas degeneradas* são o conjunto vazio, um ponto, uma recta, duas rectas concorrentes, e duas rectas paralelas. As equações reduzidas das cónicas *degeneradas* são:

Um ponto: $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 0$

Uma reta: $x^2 = 0.$

Duas retas paralelas: $\frac{x^2}{k^2} = 1.$

Duas retas concorrentes: $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 0.$

Note-se que, nas equações reduzidas a matriz associada à parte quadrática da equação é diagonal e que o tipo de cónica depende dos sinais dos valores próprios dessa matriz. Em particular podemos mostrar que se a equação

$$q_A(\mathbf{x}) + \mathbf{k}^T\mathbf{x} + j = 0, \tag{1.7}$$

define uma cónica não degenerada e λ_1, λ_2 são os valores próprios de A então:

- λ_1, λ_2 diferentes de zero e com o mesmo sinal (ou seja, A é *definida*) $\rightsquigarrow$ *elipse ou circunferência* (se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$)
- λ_1, λ_2 diferentes de zero e de sinais opostos (ou seja, A é *indefinida*) $\rightsquigarrow$ *hipérbole*
- λ_1 ou λ_2 igual a zero (ou seja A é *semi-definida*) $\rightsquigarrow$ *parábola*

Deixamos como exercício a classificação de quádricas em duas variáveis.

Exercício 1.1. Seja C o conjunto de pontos do plano definido pela equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

e λ, μ os valores próprios da matriz simétrica que define a forma quadrática associada a esta equação. Mostre que:

a) Se $\lambda\mu > 0$, então C é uma elipse (ou circunferência quando $\lambda = \mu$), um ponto, ou o vazio.
b) Se $\lambda\mu < 0$, então C é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.
c) Se $\lambda\mu = 0$, então existem duas possibilidades:
   (i) Se $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, então C é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta, ou o vazio.
   (ii) Se $\lambda = \mu = 0$, então C é uma reta ou o vazio.

▲

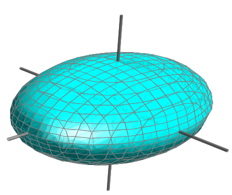
Classificação de quádricas

Equações quadráticas em 3 variáveis, definem superfícies em $\mathbb{R}^3$. A classificação destas quádricas é obtida de forma análoga ao caso das cónicas, e depende essencialmente da classificação da matriz simétrica A associada à parte quadrática da equação dada. De facto, usando uma mudança de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ em que P é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz simétrica A, a equação (1.2) transforma-se na equação

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + g' u_1 + h' u_2 + i' u_3 + j = 0, \tag{1.8}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os valores próprios de A. Sempre que um λ_i é não nulo é possível eliminar o termo linear correspondente à variável u_i (completando o quadrado respectivo). No que se segue, assumimos que foram "completados os quadrados" e apresentamos as equações módulo translações. Além disso, designa-se por *traço* a curva de interseção de uma superfície com um plano.

1. *A é definida*, isto é $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são diferentes de zero e têm todos o mesmo sinal. Neste caso, os termos lineares são eliminados e (módulo uma translação) a equação é do tipo
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = -j$$
Assumindo que os λ_i são positivos, temos: (a) o conjunto vazio se $j > 0$; (b) um elipsoide (ou uma superfície esférica quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) se $j < 0$. Na Figura 1.3 ilustramos um elipsoide.



Elipsoide.

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Figura 1.3: Elipsoide

2. *A é indefinida*, isto é, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são diferentes de zero mas existem λ_i com sinais opostos. Neste caso, também os termos lineares podem ser elimina-

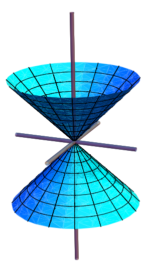
dos, e (módulo translações) obtemos as superfícies que se seguem. Assumindo $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$, a equação é da forma

$$\underbrace{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2}_{>0} - \underbrace{(-\lambda_3)}_{>0} y_3^2 = -j.$$

Estudando os traços nomeadamente com os planos coordenados, podemos identificar facilmente as seguintes superfícies:

- se $j = 0$, temos um *cone*.
- se $j < 0$, temos um *hiperboloide de uma folha*.
- se $j > 0$,temos um *hiperboloide de 2 folhas*.

Nas figuras 1.4 a1.6 ilustramos estas superfícies.

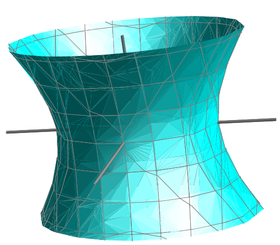


Cone elíptico

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = z^2$$

Os traços são elipses, ou hipérboles, ou rectas concorrentes, ou um ponto.

Figura 1.4: Cone elíptico.

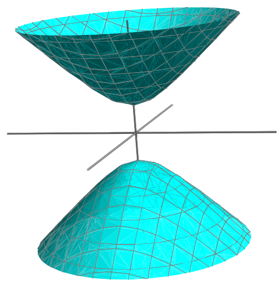


Hiperboloide de uma folha.

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

Os traços são elipses, hipérboles, ou um par de rectas concorrentes.

Figura 1.5: Hiperboloide de uma folha.



Hiperboloide de 2 folhas

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{z^2}{n^2} = -1$$

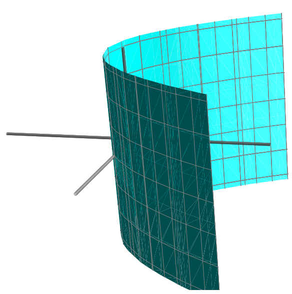
Os traços são elipses, ou hipérboles, ou um ponto, ou o conjunto vazio.

Figura 1.6: Hiperboloide de 2 folhas.

3. *A é semi-definida*, ou seja pelo menos um dos λ_i é nulo. Neste caso, a parte linear não pode ser completamente eliminada (o termo linear correspondente à variável associada aos λ_i's nulos não desaparece quando se completam os quadrados). Devemos considerar dois casos correspondentes a termos apenas um $\lambda_i = 0$ ou dois dos valores próprios nulos. Tal como anteriormente, consideramos os diferentes casos a menos de translações.

   (i) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$. Supondo que $\lambda_1 > 0$, temos uma equação do tipo
   $$\lambda_1 y_1^2 + h' y_2 + i' y_3 = -j'.$$
   Assim, se $(h', i') = (0, 0)$ obtemos: (a) o vazio se $j' > 0$; (b) um plano se $j' = 0$; (c) dois planos paralelos se $j' < 0$.

   Quando $(h', i') \neq (0, 0)$, a menos de uma translação temos um *cilindro parabólico* representado na Figura 1.7



Cilindro parabólico

$$\frac{x^2}{k^2} = py$$

Os traços são parábolas, ou retas, ou o conjunto vazio.

Figura 1.7: Cilindro parabólico.

(ii) $\lambda_3 = 0$ e λ_1, λ_2 diferentes de zero. Módulo translações, temos uma equação do tipo

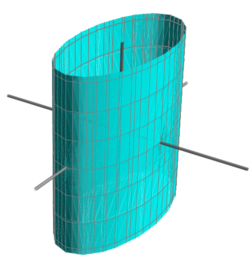
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + i' y_3 = -j'.$$

(a) $\lambda_3 = 0$, λ_1, λ_2 com o mesmo sinal que podemos assumir positivo. Ou seja, temos equações da forma

$$\underbrace{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2}_{>0} + i' y_3 = -j.$$

Se $i' = 0$, obtemos: (1) $\emptyset$ quando $j' > 0$; (2) *cilindro elíptico* com eixo y_3, quando $j' < 0$; (3) eixo y_3 para $j = 0$.
Se $i' \neq 0$ temos um *paraboloide elíptico* (parábola rodada em torno de um eixo).

Nas figuras 1.8 e1.9 encontram-se representadas estas superfícies.

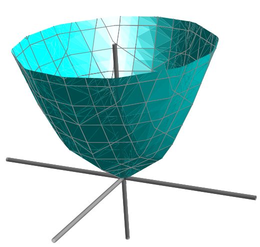


$\boxed{\text{Cilindro elíptico}}$

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

Os traços são elipses, ou circunferências, ou rectas paralelas, ou o conjunto vazio.

Figura 1.8: Cilindro elíptico.



$\boxed{\text{Paraboloide elíptico}}$

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = z$$

Os traços são elipses, ou parábolas, ou um ponto, ou o conjunto vazio.

Figura 1.9: Paraboloide elíptico.

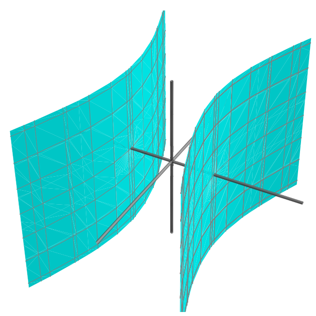
(b) $\lambda_3 = 0$, λ_1, λ_2 com sinais opostos que podemos assumir $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Ou seja, temos equações da forma

$$\lambda_1 y_1^2 - (-\lambda_2) y_2^2 + i' y_3 = -j.$$

Se $i' = 0$, temos: (1) dois planos concorrentes se $j = 0$; (2) um *cilindro hiperbólico* quando $j \neq 0$.

Se $i' \neq 0$, obtemos um *paraboloide hiperbolico* que é uma superfície com aspecto de uma sela de cavalo (ver figura 1.11).

Nas figuras 1.10 e 1.11 representam-se estas quádricas não degeneradas.

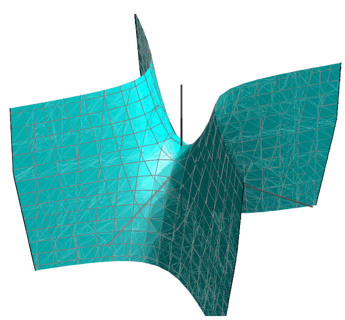


Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1$$

Os traços são hipérboles, ou retas, ou o conjunto vazio.

Figura 1.10: Cilindro hiperbólico.



Parabolóide hiperbólico

$$\frac{y^2}{l^2} - \frac{x^2}{k^2} = z$$

Os traços são hipérboles, ou parábolas, ou duas rectas concorrentes, ou o conjunto vazio.

Figura 1.11: Paraboloide hiperbólico.

Exemplo 1.3. Pretendemos identificar a superfície definida pela equação

$$-15 - 20x_1 + 8x_1^2 + 14y_1 - 4x_1y_1 + 5y_1^2 - 8z_1 + 4z_1^2 = 0. \tag{1.9}$$

A forma quadrática associada a esta equação é definida pela matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios desta matriz são $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$ (com multiplicidade algébrica 2). Os espaços próprios são

$$E(4) = \text{Span}\,\{(1,2,0),(0,0,1)\}\,, \qquad E(9) = \text{Span}\,\{(-2,1,0)\}\,.$$

Realizando a mudança de variáveis $(x_1, y_1, z_1) = P(x, y, z)$, onde P é a matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $x_1 = 1/\sqrt{5}y - 2/\sqrt{5}z$, $y_1 = 2/\sqrt{5}y + 1/\sqrt{5}z$ e $z_1 = x$, a equação (1.9) nas novas variáveis é:

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 8x + \frac{8}{\sqrt{5}}y + \frac{54}{\sqrt{5}}z - 15 = 0. \tag{1.10}$$

Existem termos lineares, pelo que vamos completar os quadrados.

$$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x-1)^2 - 4,$$

$$4y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}y = 4\left(y^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = 4\left(y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5},$$

$$9z^2 + \frac{54}{\sqrt{5}}z = 9\left(z^2 + \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\right) = 9\left(z + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{81}{5}.$$

Por conseguinte, a equação (1.10) reescreve-se na forma

$$4(x-1)^2 + 4\left(y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(z + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y + \frac{1}{\sqrt{5}})^2}{9} + \frac{(z + \frac{3}{\sqrt{5}})^2}{4} = 1.$$

Concluindo, a equação (1.9) define um elipsoide de semieixos medindo respectivamente 3, 3 e 2 unidades. Este elipsoide é a translação segundo o vetor $(-1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$ de um elipsoide centrado no sistema de eixos xyz.

♦