

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

PROJETO EM MATEMÁTICA

**Álgebras de Lie e Teoremas Clássicos
de Geometria**

Ana Sofia Guerreiro
92620

Orientador:
Prof. Esmeralda Sousa Dias

12 de julho de 2021



Conteúdo

1	Introdução	2
2	Conceitos Fundamentais	4
2.1	Conceitos básicos de geometrias bidimensionais (esférica e hiperbólica)	4
2.2	Geometria Projetiva	6
2.2.1	Dualidade projectiva	7
2.3	Álgebras de Lie	9
2.4	Estruturas de Poisson e simpléticas	11
3	Parêntesis de Poisson e de Lie e Dualidade projectiva	13
3.1	Álgebra das formas quadráticas	13
3.2	Dualidade projectiva e parêntesis de Poisson/Lie	15
4	Identidade de Jacobi e teorema do ortocentro	18
5	Identidade de Tomihisa e teoremas clássicos de geometria projectiva	20
5.1	Identidade de Tomihisa	20
5.2	Interpretação geométrica da Identidade de Tomihisa	22
5.3	Teorema de Pappus	23
5.4	Teorema de Desargues	25
5.5	Teoremas para cónicas	28
5.5.1	Cónicas	29
5.5.2	Teorema de Pascal	30
5.5.3	Recíproco do teorema de Pascal: Braikenridge-Maclaurin	33
5.5.4	Dual do teorema de Pascal: Brianchon	34

1 Introdução

Este trabalho desenvolve várias interações entre Álgebra e Geometria. Estas interações são relativamente recentes, remontando ao trabalho de Arnold [2] de 2005 onde se mostra que a concorrência das três altitudes de um triângulo hiperbólico é consequência da identidade de Jacobi de um parêntesis de Poisson no espaço das formas quadráticas no plano. Embora este teorema seja bem conhecido em geometria euclidiana, a abordagem de Arnold é unificadora, no sentido que permite que o teorema referido seja igualmente válido em geometria esférica e hiperbólica bastando para tal identificar álgebras de Lie que modelem essas geometrias.

Posteriormente ao trabalho de Arnold surgiram artigos que clarificam não só este trabalho como desenvolvem outras identidades em álgebras de Lie que permitem obter teoremas clássicos da geometria. Mais concretamente, Tomihisa [9] provou uma identidade válida para álgebras de Lie reais tridimensionais e utilizou-a para demonstrar vários teoremas de geometria projetiva e Aicardi [1] mostrou que a identidade de Tomihisa é equivalente ao teorema de Pappus.

Os artigos Aicardi [1] e Tomihisa [9] são as referências principais deste projeto. No entanto, os resultados aqui apresentados nem sempre usam a mesma abordagem que o resultado apresentado nestas referências, nomeadamente, nas provas do teorema de Desargues e da identidade de Tomihisa.

As primeiras secções destinam-se a estabelecer notação e introduzir conceitos básicos das geometrias aqui tratadas, em particular, para geometria esférica e geometria hiperbólica. Refira-se que a apresentação de certos conceitos é propositadamente sumária e que o leitor poderá necessitar de consultar referências adicionais.

Na Secção 2 são apresentados vários conceitos da geometria projetiva plana, necessários para tratar tanto os teoremas clássicos de geometria projetiva (ex. Pappus, Desargues, Pascal), como para trabalhar com o modelo de Klein (modelo projetivo de geometria hiperbólica). O conceito de dualidade no plano projetivo é também sumariamente abordado, dada a sua relevância no enunciado de teoremas duais. É ainda nesta secção que se definem álgebras de Lie, aparecendo pela primeira vez a identidade de Jacobi, que mais tarde iremos relacionar diretamente com o problema do ortocentro de triângulos. Além disso, apresentam-se vários exemplos de álgebras de Lie relevantes para este trabalho e estabelecem-se vários isomorfismos dessas álgebras. Por fim, introduzimos (sumariamente) estruturas de Poisson e

simpléticas, com ênfase no parêntesis de Poisson canónico em \mathbb{R}^{2n} .

A Secção 3 é dedicada à interpretação geométrica do parêntesis de Lie, ou de Poisson, da álgebra de Lie das formas quadráticas em termos da dualidade projetiva na geometria projetiva plana. Esta interpretação é crucial nas secções seguintes.

Na Secção 4 relacionamos diretamente a identidade de Jacobi com o teorema do ortocentro para triângulos hiperbólicos (e analogamente para triângulos esféricos).

A Secção 5 é dedicada à identidade de Tomihisa e às suas consequências geométricas. Em Aicardi [1] é feita a interpretação geométrica desta identidade, e provada a sua equivalência com o teorema de Pappus (ver Proposição 5). Para além disso, mostramos que a aplicação sucessiva da identidade de Tomihisa permite obter o teorema de Desargues (Teorema 4), ou seja, mostramos que "Pappus implica Desargues". Finalmente, abordamos teoremas clássicos para cónicas, demonstrando o teorema de Pascal (e o seu dual) bem como o seu recíproco, o qual permite fazer a construção de uma cónica definida por 5 pontos.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Conceitos básicos de geometrias bidimensionais (esférica e hiperbólica)

Neste trabalho estamos particularmente interessados em geometrias não-euclidianas bidimensionais, nomeadamente na geometria esférica e hiperbólica.

O modelo mais simples da geometria esférica é a superfície de uma esfera em \mathbb{R}^3 , $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, munida da métrica euclidiana associada ao produto interno $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_E = xx' + yy' + zz'$, com $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ vetores de \mathbb{R}^3 . Um modelo para a geometria hiperbólica é um hiperbolóide, $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$, munido da pseudo-métrica associada ao pseudo-produto interno $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_H = xx' + yy' - zz'$, também conhecida como pseudo-métrica de *Minkowski*.

Entre todas as curvas de uma certa superfície que unem dois pontos, as *geodésicas* são as curvas de comprimento mínimo. Assim, em \mathbb{S}^2 as geodésicas são círculos máximos, enquanto que em \mathcal{H} as geodésicas são hipérbolas. Em ambos os casos, as geodésicas são a interseção de planos que passam na origem com a superfície esférica \mathbb{S}^2 ou com o hiperbolóide \mathcal{H} . Estas geodésicas são denominadas por *retas* da geometria em questão.

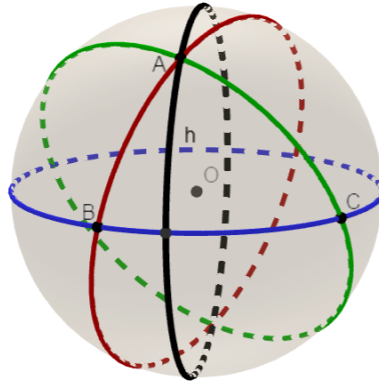


Figura 1: A altitude h do vértice A do triângulo esférico $\triangle ABC$.

Na figura 1, ilustram-se as geodésicas na geometria esférica bem como um *triângulo* e uma *altitude*. Note-se que um $\triangle ABC$ é a figura formada por três pontos (os vértices) e três lados que são arcos de geodésicas entre os vértices. A altitude h que passa pelo vértice A é definida como sendo a geodésica

que passa por A e é ortogonal ao lado oposto BC , onde a ortogonalidade é relativa ao produto interno associado à métrica subjacente à geometria.

No caso da geometria hiperbólica, existem inúmeros modelos da sua representação. Estes podem ser obtidos do hiperbolóide \mathcal{H} através de diferentes projeções. Vamos apenas referir os modelos de *Poincaré* e *Beltrami-Klein*. Ambos são obtidos através de uma projeção estereográfica do hiperbolóide \mathcal{H} da seguinte forma:

- **Disco de Poincaré \mathbb{D}_P** : projetando \mathcal{H} no plano $z = 0$ a partir do ponto $(0, 0, -1)$, obtemos o disco $\mathbb{D}_P = \{x^2 + y^2 < 1\}$. As geodésicas são projetadas em diâmetros ou arcos de circunferências que intersectam ortogonalmente a fronteira do disco \mathbb{D}_P .
- **Disco de Beltrami-Klein \mathbb{D}_K** : projetando \mathcal{H} no plano $z = 1$ a partir da origem também se obtém um disco, $\mathbb{D}_K = \{x^2 + y^2 < 1\}$, mas neste caso as geodésicas são projetadas em cordas do disco.

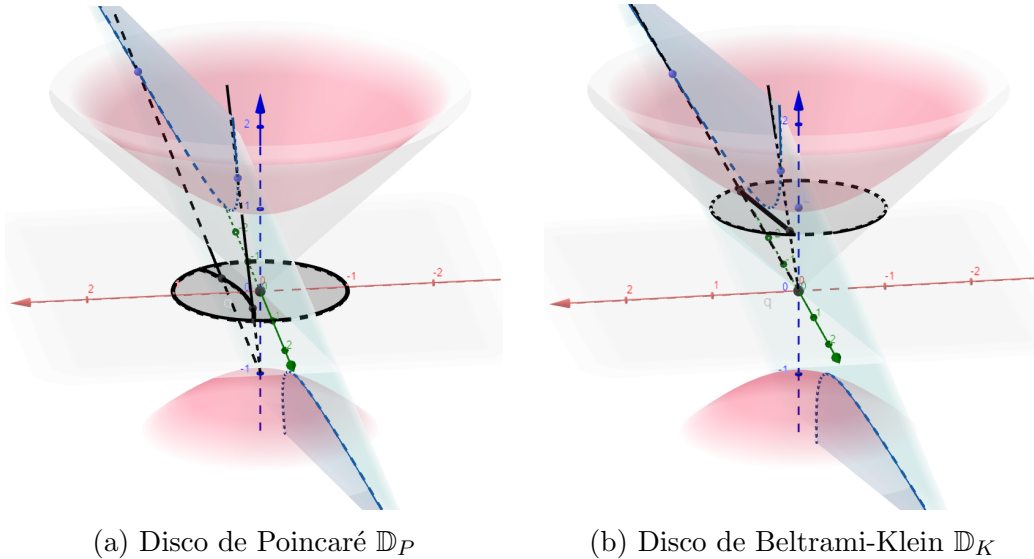


Figura 2: As projeções estereográficas de \mathcal{H} num plano, e os dois modelos dos discos \mathbb{D}_P e \mathbb{D}_K da geometria hiperbólica bidimensional.

Nas figuras 2 e 3 ilustramos a projeção estereográfica do hiperbolóide nos respetivos modelos \mathbb{D}_P e \mathbb{D}_K .

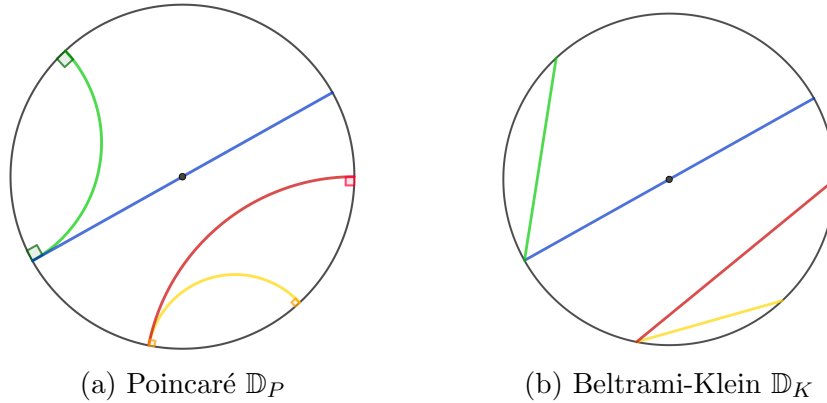


Figura 3: Dois modelos de geometria hiperbólica bidimensional e respetivas geodésicas.

Finalizamos esta secção por relembrar que uma diferença essencial entre a geometria euclidiana e as duas geometrias não euclidianas acima referidas (esférica e hiperbólica) reside no 5º postulado de Euclides (ou postulado das paralelas). De facto, dada uma reta e um ponto não pertencente à reta: (i) na geometria euclidiana existe uma única reta que passa pelo ponto e não intersecta a reta dada (i.e. é paralela); (ii) na geometria hiperbólica existem pelo menos duas retas que passam pelo ponto e são paralelas à reta dada; (iii) na geometria esférica qualquer reta que passa pelo ponto intersecta a reta dada.

Uma outra diferença entre estas geometrias diz respeito à soma dos ângulos internos de um triângulo. Mais precisamente, esta soma é 180° na geometria euclidiana, é menor que 180° na geometria hiperbólica e maior que 180° na geometria esférica.

2.2 Geometria Projetiva

O *plano projetivo real*, \mathbb{RP}^2 , é o conjunto das retas de \mathbb{R}^3 que passam na origem. Podemos representar cada ponto de \mathbb{RP}^2 por coordenadas homogêneas $[x : y : z]$, onde as coordenadas $[x : y : z]$ e $[\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ representam o mesmo ponto para qualquer real $\lambda \neq 0$ e x, y, z reais não simultaneamente zero. Cada ponto $[x : y : z]$ de \mathbb{RP}^2 corresponde à reta de \mathbb{R}^3 que passa pela origem definida pelo vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Uma reta em \mathbb{RP}^2 é o conjunto de retas de \mathbb{R}^3 que passam na origem que pertencem ao um mesmo plano de

\mathbb{R}^3 , ou seja, uma reta de \mathbb{RP}^2 é identificável a um plano de \mathbb{R}^3 que contém a origem. Habitualmente, \mathbb{RP}^2 é obtido como a projeção de \mathbb{R}^3 no plano $z = 1$ (mas podemos considerar qualquer outro plano). Mais precisamente, qualquer reta que passe na origem e não pertença ao plano xy é projetada num ponto do plano $z = 1$, enquanto o plano xy é projetado no denominado ponto do "infinito" de \mathbb{RP}^2 (i.e., o conjunto de pontos $[x : y : 0] \in \mathbb{RP}^2$).

2.2.1 Dualidade projectiva

O *princípio da dualidade* num plano projetivo é um conceito que permite trocar os papéis de pontos com o de retas e obter a partir de um dado teorema um outro teorema sem necessidade de prova adicional. A dualidade projetiva pode ser introduzida de várias formas e no que se segue usamos uma abordagem funcional, isto é consideramos uma aplicação bilinear que leva pontos de \mathbb{RP}^2 em retas e retas de \mathbb{RP}^2 em pontos. Tendo em vista, as diferentes geometrias anteriormente referidas, consideramos as aplicações

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_E = xx' + yy' + zz', \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle_H = xx' + yy' - zz', \quad (1)$$

onde $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v}' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Denotamos por \mathbb{R}_E^3 e \mathbb{R}_H^3 o espaço \mathbb{R}^3 equipado, respetivamente, com o produto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e o pseudo-produto interno de Lorentz $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. De igual modo, denotamos por \mathbb{RP}_E^2 e \mathbb{RP}_H^2 o plano projetivo obtido por projeção de \mathbb{R}_E^3 e \mathbb{R}_H^3 respectivamente.

Podemos interpretar geometricamente a projeção de \mathbb{R}_H^3 em \mathbb{RP}_H^2 . Para tal, considere-se a função $\pi : \mathbb{R}_H^3 \rightarrow \mathbb{RP}_H^2$ que a cada ponto $[x' : y' : z'] \in \mathbb{RP}_H^2$, com $z' \neq 0$ obtém a interseção da reta de vetor diretor (x', y', z') no plano $z = 1$, ou seja, $\pi(x', y', z') = (\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}) = (x, y)$. Então,

1. se $\langle (x', y', z'), (x', y', z') \rangle_H = 0$, ou seja, $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0$, então obtemos $x^2 + y^2 = 1$. Logo, o cone $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0$ é projetado no denominado *círculo absoluto*.
2. se $\langle (x', y', z'), (x', y', z') \rangle_H > 0$, ou seja, $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 > 0$, então obtemos $x^2 + y^2 > 1$. Logo, o conjunto de pontos tal que $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 > 0$ é projetado para o exterior do círculo absoluto, designado de *De Sitter world*.
3. se $\langle (x', y', z'), (x', y', z') \rangle_H < 0$, ou seja, $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 < 0$, então obtemos $x^2 + y^2 < 1$. Logo, o conjunto de pontos tal que $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 < 0$ é designado de *plano hiperbólico*.

É agora óbvio por que razão o modelo de Beltrami-Klein é conhecido como o *modelo projetivo* da geometria hiperbólica.

Definição 1. *A dualidade no plano projetivo é definida da seguinte forma:*

1. *A reta dual de um ponto $P = [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{RP}_E^2$ é o conjunto de pontos $P^* = [x : y : z]$ que satisfazem a equação $\alpha x + \beta y + \gamma z = \langle (\alpha, \beta, \gamma), (x, y, z) \rangle_E = 0$.*
2. *A reta dual de um ponto $P = [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{RP}_H^2$ é o conjunto de pontos $P^* = [x : y : z]$ que satisfazem a equação $\alpha x + \beta y - \gamma z = \langle (\alpha, \beta, \gamma), (x, y, z) \rangle_H = 0$.*

É possível mostrar que a representação geométrica da reta dual de um ponto de \mathbb{RP}^2 , em relação à circunferência unitária, se determina através de tangentes a esta circunferência como se ilustra na Figura 4. Por exemplo, se o ponto $P \in \mathbb{RP}_H^2$ é exterior à circunferência unitária, então traçando a partir de P tangentes à circunferência, os dois pontos de tangência definem a reta dual de P . O leitor interessado nessa prova pode consultar [1, 2, 9].

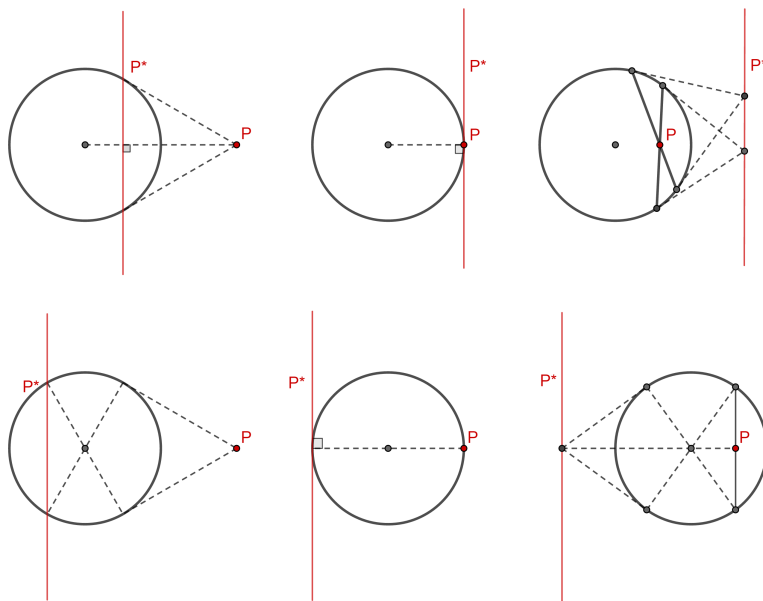


Figura 4: Dualidade em \mathbb{RP}_H^2 (em cima) e \mathbb{RP}_E^2 (em baixo)

Observação 1. Como referimos anteriormente, o princípio da dualidade da geometria projetiva plana permite obter de uma certa proposição verdadeira uma proposição dual igualmente verdadeira. A proposição dual é obtida pelas operações seguintes: (1) trocar "reta" por "ponto" e vice-versa; (2) trocar "estar em" por "passar por".

Exemplos de proposições duais: (i) "3 pontos são colineares" o dual é: "três retas são concorrentes num ponto"; (ii) "duas retas intersectam-se num ponto" o dual é: "por dois pontos passa uma reta".

2.3 Álgebras de Lie

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial V equipado com um parêntesis $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ que é anticomutativo, bilinear e satisfaz a denominada identidade de Jacobi:

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0, \quad \forall a, b, c \in V. \quad (2)$$

Exemplo 1. O espaço vetorial $\mathfrak{so}(3)$, das matrizes 3×3 antissimétricas reais, equipado com o comutador de matrizes, $[A, B] = AB - BA$, é uma álgebra de Lie.

De facto, prova-se facilmente a anticomutatividade e a bilinearidade do comutador de matrizes. Quanto à identidade de Jacobi basta mostrá-la para uma base de $\mathfrak{so}(3)$, devido à bilinearidade. Para tal, considere-se a base

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula-se facilmente que $[I_1, I_2] = I_3$, $[I_3, I_1] = I_2$ e $[I_2, I_3] = I_1$. Logo,

$$[I_1, [I_2, I_3]] + [I_3, [I_1, I_2]] + [I_2, [I_3, I_1]] = [I_1, I_1] + [I_3, I_3] + [I_2, I_2] = 0,$$

onde a última igualdade resulta da anticomutatividade do comutador que implica $[M, M] = 0$ para qualquer matriz M .

Exemplo 2. Considere-se agora o espaço vetorial $\mathfrak{sl}(2)$ das matrizes reais 2×2 de traço nulo, também equipado com o comutador de matrizes. Este espaço é uma álgebra de Lie, já que para a base

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tem

$$[I_1, I_2] = 2I_2, \quad [I_1, I_3] = -2I_3, \quad [I_2, I_3] = I_1,$$

e portanto

$$[I_1, [I_2, I_3]] + [I_3, [I_1, I_2]] + [I_2, [I_3, I_1]] = [I_1, I_1] + [I_3, 2I_2] + [I_2, 2I_3] = 0.$$

Nos exemplos anteriores apresentámos álgebras de Lie reais tridimensionais em que o parêntesis de Lie é o comutador, de seguida consideramos outros exemplos cujo parêntesis de Lie não é o comutador.

Considere-se \mathbb{R}^3 equipado com o produto externo de vetores, \wedge , e com uma modificação deste produto externo, que designamos por $\bar{\wedge}$. Nomeadamente, sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ os vetores de \mathbb{R}^3 e

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (3)$$

$$\mathbf{u} \bar{\wedge} \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, -(u_1v_2 - u_2v_1)). \quad (4)$$

Proposição 1. (\mathbb{R}^3, \wedge) e $(\mathbb{R}^3, \bar{\wedge})$ são álgebras de Lie isomorfas a $(\mathfrak{so}(3), [,])$ e $(\mathfrak{sl}(2), [,])$, respetivamente.

Demonstração. Mostremos que $\mu_1 : (\mathbb{R}^3, \wedge) \rightarrow (\mathfrak{so}(3), [,])$ e $\mu_2 : (\mathbb{R}^3, \bar{\wedge}) \rightarrow (\mathfrak{sl}(2), [,])$ dados por

$$\mu_1 : (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y & -(x+z) \\ z-x & -y \end{bmatrix}. \quad (5)$$

são isomorfismos, i.e.

$$\mu_1(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = [\mu_1(\mathbf{u}), \mu_1(\mathbf{v})], \quad \mu_2(\mathbf{u} \bar{\wedge} \mathbf{v}) = [\mu_2(\mathbf{u}), \mu_2(\mathbf{v})].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_1(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= \mu_1(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & u_2v_1 - u_1v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 & 0 & u_3v_2 - u_2v_3 \\ u_1v_3 - u_3v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\mu_1(\mathbf{u}), \mu_1(\mathbf{v})].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(\mathbf{u} \bar{\wedge} \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_3v_1 - u_1v_3 & -(u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2v_1 - u_1v_2) \\ (u_2v_1 - u_1v_2) - (u_2v_3 - u_3v_2) & u_1v_3 - u_3v_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} u_2v_2 - (u_1 + u_3)(v_3 - v_1) & v_2(u_3 - u_1) - u_2(v_3 - v_1) \\ -u_2(v_1 + v_3) + v_2(u_1 + u_3) & -(u_3 - u_1)(v_1 + v_3) + u_2v_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} v_2u_2 - (v_1 + v_3)(u_3 - u_1) & u_2(v_3 - v_1) - v_2(u_3 - u_1) \\ -v_2(u_1 + u_3) + u_2(v_1 + v_3) & -(v_3 - v_1)(u_1 + u_3) + v_2u_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & -(u_1 + u_3) \\ (u_3 - u_1) & -u_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_2 & -(v_1 + v_3) \\ (v_3 - v_1) & -v_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_2 & -(v_1 + v_3) \\ (v_3 - v_1) & -v_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & -(u_1 + u_3) \\ (u_3 - u_1) & -u_2 \end{bmatrix} \\
&= [\mu_2(\mathbf{u}), \mu_2(\mathbf{v})].
\end{aligned}$$

□

2.4 Estruturas de Poisson e simpléticas

Definição 2. *Uma variedade de Poisson M é uma variedade equipada com um parêntesis $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, designado por parêntesis*

de Poisson, definido no espaço das funções suaves em M , $C^\infty(M)$, tal que:

1. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ é uma álgebra de Lie;
2. $\{\cdot, \cdot\}$ satisfaz a identidade de Leibniz: $\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + g \cdot \{f, h\}$.

Ao par $(M, \{\cdot, \cdot\})$ chamamos variedade de Poisson.

Exemplo 3. Considere-se \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. O parêntesis de Poisson canônico em \mathbb{R}^{2n} é dado por:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} = \nabla F^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \nabla G = \nabla F^T [\pi_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \nabla G,$$

onde F, G são funções de (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , I_n é a matriz identidade de ordem n , ∇F o gradiente de F e $[\pi_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{p})]$ é denominado por tensor de Poisson.

Esta estrutura de Poisson é não degenerada uma vez que o tensor de Poisson é não singular.

Uma variedade de Poisson é uma generalização de variedade simplética já que qualquer variedade simplética é uma variedade de Poisson, embora o contrário não se verifique.

Neste trabalho apenas consideramos espaços vetoriais reais de dimensão finita pelo que podemos usar a definição seguinte.

Definição 3. Uma forma simplética num espaço vetorial real V é uma forma ω bilinear, antissimétrica e não degenerada. Um espaço vetorial simplético é um espaço vetorial munido de uma forma simplética.

Da definição anterior, é imediato concluir que todos os espaços vetoriais simpléticos são de dimensão par (devido à não degenerescência de ω).

Exemplo 4. Em \mathbb{R}^{2n} a forma simplética canónica é dada por

$$\omega_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle J\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^{2n} .

É conveniente ver uma forma bilinear como uma matriz, $[\Omega_{ij}]$. Para tal, fixamos uma base $(\mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_k)$ no espaço vetorial V e a matriz associada à forma simplética ω é $\Omega_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. No Exemplo 6, a matriz associada é a matriz J .

É possível mostrar que em qualquer espaço vetorial simplético existe uma base (conhecida como *base de Darboux*) na qual a matriz associada à forma simplética é a matriz J em (6). Habitualmente, escreve-se

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i,$$

onde dq_i, dp_i são entendidos como elementos da base dual para as coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Podemos ver $dq_i \wedge dp_i(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ como o determinante das projecções de \mathbf{u} e \mathbf{v} no plano (q_i, p_i) .

As estruturas de Poisson não degeneradas estão em correspondência bi-única com estruturas simpléticas. De fato, dada uma forma simplética existe uma estrutura de Poisson associada cujo tensor de Poisson é a matriz inversa da matriz que define a forma simplética. Comparar a forma simplética canónica em \mathbb{R}^{2n} com a estrutura de Poisson canónica no Exemplo 3.

3 Parêntesis de Poisson e de Lie e Dualidade projetiva

Nesta secção pretende-se interpretar a dualidade projetiva em termos de parêntesis de Lie. Tanto quanto sabemos, Arnold [2] foi pioneiro no desenvolvimento desta abordagem tendo usado para tal o conjunto das formas quadráticas definidas no plano simplético. Aqui mostramos que essa abordagem é equivalente ao uso de álgebras de Lie munidas de um (pseudo)produto interno adequado.

3.1 Álgebra das formas quadráticas

Designemos por \mathcal{Q} o conjunto das formas quadráticas no plano:

$$\mathcal{Q} = \{Q(q, p) : Q = ap^2 + 2bpq + cq^2\}.$$

Considere-se a aplicação $\psi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\psi : Q = ap^2 + 2bpq + cq^2 \mapsto \psi(Q) = \left(\frac{a-c}{2}, b, \frac{a+c}{2} \right). \quad (7)$$

Esta aplicação admite inversa:

$$\psi^{-1}((x, y, z)) = (x + z)p^2 + 2ypq + (z - x)q^2$$

Vamos agora estabelecer algumas relações entre os (pseudo)produtos internos em \mathbb{R}^3 atrás referidos e uma outra aplicação bilinear definida em \mathcal{Q} , para posteriormente aplicar a projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, definida na página 7, e traduzir a dualidade projetiva em termos de formas quadráticas.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por:

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle_{\mathcal{Q}} := b_1b_2 - \frac{a_1c_2 + a_2c_1}{2}, \quad (8)$$

com $Q_1 = a_1p^2 + 2b_1pq + c_1q^2$ e $Q_2 = a_2p^2 + 2b_2pq + c_2q^2$.

Proposição 2. *Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}}$ e $\langle \cdot \rangle_H$ as formas bilineares definidas em (8) e (1), respectivamente. Então,*

$$\langle \psi(Q_1), \psi(Q_2) \rangle_H = \langle Q_1, Q_2 \rangle_{\mathcal{Q}}. \quad (9)$$

Demonstração. Por definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ em (1) temos

$$\begin{aligned} \langle \psi(Q_1), \psi(Q_2) \rangle_H &= \frac{(a_1 - c_1)(a_2 - c_2)}{4} + b_1b_2 - \frac{(a_1 + c_1)(a_2 + c_2)}{4} \\ &= b_1b_2 - \frac{a_1c_2 + a_2c_1}{2} \end{aligned}$$

□

Também temos outra relação, neste caso com o pseudo-produto externo.

Proposição 3. *A relação entre o parêntesis de Poisson canónico nas formas quadráticas e o pseudo-produto externo no plano projetivo é*

$$\psi(\{Q_1, Q_2\}) = -4(\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2)). \quad (10)$$

Demonstração 1.

$$\begin{aligned} \psi(\{Q_1, Q_2\}) &= \psi\left(\frac{\partial Q_1}{\partial p} \frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p} \frac{\partial Q_1}{\partial q}\right) \\ &= \psi((2a_1p + 2b_1q)(2b_2p + 2c_2q) - (2a_2p + 2b_2q)(2b_1p + 2c_1q)) \\ &= \psi(4[(a_1b_2 - a_2b_1)p^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)pq + (b_1c_2 - b_2c_1)q^2]) \\ &= 2(a_1b_2 - a_2b_1 - b_1c_2 + b_2c_1, a_1c_2 - a_2c_1, a_1b_2 - a_2b_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= -4(\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2)). \end{aligned}$$

Observação 2. *Quaisquer múltiplos escalares de um parêntesis de Poisson continuam a ser parêntesis de Poisson. Logo, podemos considerar*

$$\{Q_1, Q_2\} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p} \frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p} \frac{\partial Q_1}{\partial q} \right)$$

e, com este parêntesis, a igualdade (10) escreve-se

$$\psi(\{Q_1, Q_2\}) = \psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2).$$

Assim, ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie, $(\mathcal{Q}, \{, \})$ e $(\mathbb{R}^3, \bar{\wedge})$.

Observação 3. *Do mesmo modo já vimos que $(\mathfrak{sl}(2), [,])$ e $(\mathbb{R}^3, \bar{\wedge})$ são isomorfos por μ_2 em (5). Assim, não é difícil também encontrar uma relação entre o pseudo-produto interno \langle, \rangle_H em \mathbb{R}^3 e o seguinte produto em $\mathfrak{sl}(2)$*

$$\langle A, B \rangle_{\mathfrak{sl}(2)} = \det(A + B) - \det(A) - \det(B), \quad \forall A, B \in \mathfrak{sl}(2)$$

que é $-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H = \langle \mu_2(\mathbf{u}), \mu_2(\mathbf{v}) \rangle_{\mathfrak{sl}(2)}$ para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

3.2 Dualidade projetiva e parêntesis de Poisson/Lie

Como já vimos antes, a noção de dualidade (cf. Definição 1) no plano projetivo depende da noção de "ortogonalidade" adotada. O objectivo desta secção é interpretar geometricamente a dualidade projetiva em termos de parêntesis de Poisson e de Lie. Começamos por utilizar as formas quadráticas.

Seja $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tal que $\varphi = \pi \circ \psi$, onde ψ é a aplicação em (7) e π a projecção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Da Proposição 3 e das propriedades da projecção temos

$$\varphi(\{Q_1, Q_2\}) = \pi \circ \psi(\{Q_1, Q_2\}) = \pi(-4(\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2))) = \pi(\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2)).$$

Ou seja, o ponto $\varphi(\{Q_1, Q_2\}) \in \mathbb{RP}_H^2$ é a projecção do vetor $\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2) \in \mathbb{R}^3$.

Como $\psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2)$ é um vector H -ortogonal a $\psi(Q_1)$ e $\psi(Q_2)$, da Proposição 2 temos:

$$\langle Q_1, \{Q_1, Q_2\} \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle \psi(Q_1), \psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2) \rangle_H = 0 \quad (11)$$

$$\langle Q_2, \{Q_1, Q_2\} \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle \psi(Q_2), \psi(Q_1) \bar{\wedge} \psi(Q_2) \rangle_H = 0 \quad (12)$$

Estas identidades dizem-nos que o ponto $\varphi(\{Q_i, Q_j\})$ pertence à reta dual de $\varphi(Q_i)$ e à reta dual de $\varphi(Q_j)$. Assim,

1. $\varphi(\{Q_1, Q_2\}) \in \varphi(Q_1)^*$ e $\varphi(\{Q_1, Q_2\}) \in \varphi(Q_2)^*$. Equivalentemente,

$$\varphi(\{Q_1, Q_2\}) = \varphi(Q_1)^* \cap \varphi(Q_2)^*. \quad (13)$$

Ou seja, $\varphi(\{Q_1, Q_2\})$ é o ponto de interseção das retas duais de $\varphi(Q_1)$ e $\varphi(Q_2)$.

2. Dualizando a relação (13) (ver Observação 1), obtemos ainda a seguinte identidade

$$\varphi(\{Q_1, Q_2\})^* = \varphi(Q_1)\varphi(Q_2), \quad (14)$$

onde denotamos por $\varphi(Q_1)\varphi(Q_2)$ a reta projetiva que passa pelos pontos $\varphi(Q_1)$ e $\varphi(Q_2)$. Ou seja, (14) diz-nos que a reta que passa pelos pontos $\varphi(Q_1)$ e $\varphi(Q_2)$ é a reta dual de $\varphi(\{Q_1, Q_2\})$.

Em suma,

Proposição 4. *Seja K um ponto de \mathbb{RP}_H^2 , Q_K uma forma quadrática tal que $\varphi(Q_K) = K$, e K^* a reta dual de K . Então,*

$$\varphi(\{Q_A, Q_B\}) = A^* \cap B^*, \quad \varphi(\{Q_A, Q_B\})^* = AB, \quad \forall A, B \in \mathbb{RP}_H^2. \quad (15)$$

Ilustramos a Proposição 4 na Figura 5.

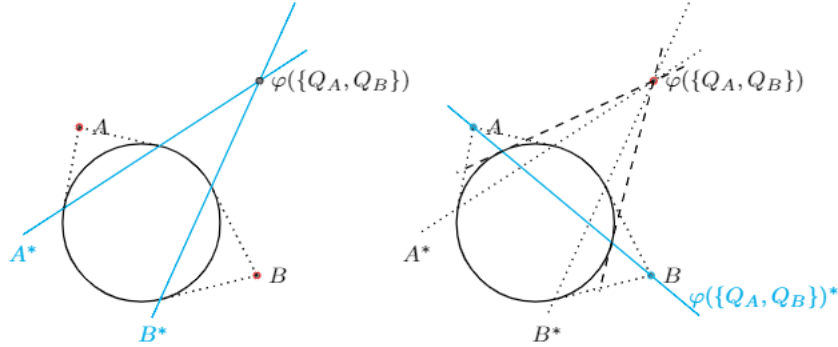


Figura 5: Esquerda: $\varphi(\{Q_A, Q_B\}) = A^* \cap B^*$. Direita: $\varphi(\{Q_A, Q_B\})^* = AB$.

Pela Proposição 2 e Observação 3, podemos traduzir a dualidade de \mathbb{RP}_H^2 em $(\mathcal{Q}, \{, \}, \langle, \rangle_{\mathcal{Q}})$, $(\mathbb{R}^3, \bar{\wedge}, \langle, \rangle_H)$ ou em $(\mathfrak{sl}(2), [,], \langle, \rangle_{\mathfrak{sl}(2)})$. De forma a simplificar a notação vamos omitir aplicação $\varphi = \pi \circ \psi$ e denotar quaisquer dos parêntesis $\{, \}$, $\bar{\wedge}$ ou $[,]$ simplesmente por $[,]$.

Notação

Seja π a projeção $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{RP}_H^2$ onde a álgebra de Lie \mathfrak{g} é \mathcal{Q} , \mathbb{R}^3 ou $\mathfrak{sl}(2)$. Considere-se $\mathbf{u}_K \in \mathfrak{g}$ tal que $\pi(\mathbf{u}_K) = K$

- (i) O ponto dual da reta definida por A e B será denotado por $[A, B]$, cujo significado é:

$$(AB)^* = (\pi(\mathbf{u}_A)\pi(\mathbf{u}_B))^* = \pi([\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]). \quad (16)$$

- (ii) O ponto $AB \cap CD$ é designado por $[[A, B], [C, D]]$, já que:

$$AB \cap CD \stackrel{(16)}{=} (\pi([\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]))^* \cap (\pi([\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_D]))^* \stackrel{(15)}{=} \pi([\pi([\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]), \pi([\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_D])]) \quad (17)$$

onde aplicamos (16) na primeira igualdade enquanto a segunda segue da primeira equação em (15).

- (iii) $(AB \cap CD)^*$ é denotado por $[A, B][C, D]$, cujo significado é:

$$(AB \cap CD)^* \stackrel{(17)}{=} (\pi([\pi([\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]), \pi([\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_D])]))^* \stackrel{(15)}{=} \pi([\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B])\pi([\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_D]). \quad (18)$$

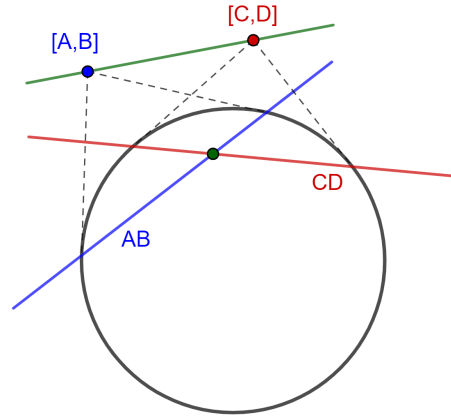


Figura 6: Dualidade projetiva em relação ao círculo unitário e parêntesis de Lie $[,]$. Pontos e linhas de cores iguais são duais um do outro.

4 Identidade de Jacobi e teorema do ortocentro

Em geometria euclidiana é bem conhecido que as três altitudes de um triângulo se intersectam num ponto que se designa por *ortocentro*. Porém tal resultado é menos conhecido no caso de triângulos esféricos e hiperbólicos, tal como é reconhecido em [8].

Em 2005, Arnold [2] provou que o teorema do ortocentro, no plano hiperbólico, é uma consequência da identidade de Jacobi do parêntesis de Poisson definido no espaço das formas quadráticas. Certos aspectos do trabalho de Arnold foram entretanto clarificados em Aicardi [1] (ex. para triângulos esféricos) e Tomihisa [9]. Nesta secção apresentamos a prova do resultado de Arnold, usando a álgebra de Lie das formas quadráticas.

Dado um triângulo $\triangle ABC$, pretende-se determinar a altitude do ponto A em relação ao lado BC , ou seja, a reta que passa no ponto A e é H -ortogonal ao lado BC . Designemos Q_A, Q_B e Q_C as formas quadráticas correspondentes, ou seja, tais que $\varphi(Q_A) = A$, $\varphi(Q_B) = B$ e $\varphi(Q_C) = C$. Note-se ainda que pela Proposição 9, a reta H -ortogonal à reta BC é \mathcal{Q} -ortogonal a $Q_B Q_C$.

Por definição de dualidade (cf. Definição 1) o ponto $(BC)^*$ é H -ortogonal à reta BC . Assim, a altitude, h_A , do ponto A em relação ao lado BC é a reta $\varphi(Q_A)(\varphi(Q_B)\varphi(Q_C))^*$. Ou seja,

$$h_A : \underbrace{\varphi(Q_A)(\varphi(Q_B)\varphi(Q_C))^*}_{A(BC)^*} \stackrel{(15)}{=} \varphi(Q_A)\varphi(\{Q_B, Q_C\}) \stackrel{(15)}{=} \varphi(\{Q_A, \{Q_B, Q_C\}\})^* \quad (19)$$

Na figura 7 ilustra-se o resultado acima.

Se pensarmos neste resultado em $(\mathbb{R}^3, \bar{\wedge}) := (\mathbb{R}^3, [,])$, podemos escrever para cada ponto $K \in \mathbb{R}P^2$ um vetor $\mathbf{u}_K \in \mathbb{R}^3$ correspondente, ou seja, tal que $\pi : \mathbf{u}_K \mapsto K$. Portanto, a altitude h_A pode escrever-se:

$$h_A : \underbrace{\pi(\mathbf{u}_A)(\pi(\mathbf{u}_B)\pi(\mathbf{u}_C))^*}_{A(BC)^*} = \pi(\mathbf{u}_A)\pi([\mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C]) = \pi([\mathbf{u}_A, [\mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C]])^*. \quad (20)$$

Evidentemente, no contexto da geometria esférica a álgebra de Lie a considerar é $(\mathbb{R}^3, \wedge) := (\mathbb{R}^3, [,])$ e a noção de ortogonalidade (dualidade) é relativa ao produto interno euclidiano. Assim, com as devidas adaptações a altitude h_A em (20) mantém-se válida nesta geometria.

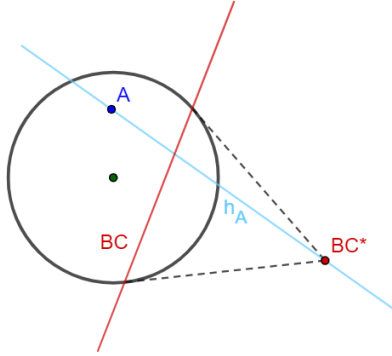


Figura 7: Altitude em \mathcal{H} , h_A , do ponto $A = \varphi(Q_A)$ em relação à reta BC .

Teorema 1 (Ortocentro). *As três altitudes de um triângulo esférico ou hiperbólico são concorrentes.*

Demonstração. Pela identidade de Jacobi de um parêntesis de Lie, temos

$$\underbrace{[\mathbf{u}_A, [\mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C]]}_{\mathbf{k}} + \underbrace{[\mathbf{u}_C, [\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]]}_{\mathbf{v}} + \underbrace{[\mathbf{u}_B, [\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_A]]}_{\mathbf{w}} = 0.$$

Esta igualdade diz-nos que os vetores $\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes, ou seja, estão no mesmo plano de \mathbb{R}^3 (que passa na origem). Logo os seus pontos projetivos, $\pi(\mathbf{k}), \pi(\mathbf{v}), \pi(\mathbf{w})$, são colineares em \mathbb{RP}^2 . Isto é equivalente a escrever que as suas retas duais, $\pi(\mathbf{k})^*, \pi(\mathbf{v})^*, \pi(\mathbf{w})^*$, são concorrentes num ponto projetivo O (ver Observação 1). Por outro lado, por (20), isto significa que as altitudes

$$\begin{aligned} h_A &: \pi(\mathbf{k})^* = \pi([\mathbf{u}_A, [\mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C]])^* \\ h_C &: \pi(\mathbf{v})^* = \pi([\mathbf{u}_C, [\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B]])^* \\ h_B &: \pi(\mathbf{w})^* = \pi([\mathbf{u}_B, [\mathbf{u}_C, \mathbf{u}_A]])^* \end{aligned}$$

do triângulo $\triangle ABC$, são concorrentes no ponto O . □

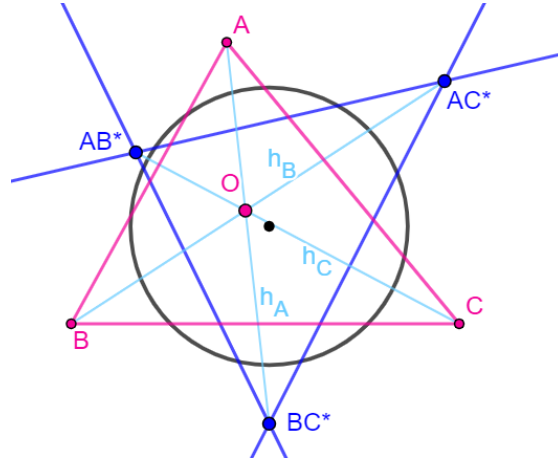


Figura 8: Em \mathbb{RP}_H^2 , o triângulo $\triangle ABC$ e o seu triângulo dual (a azul). As altitudes de $\triangle ABC$ em ciano e o ortocentro (de ambos os triângulos) é o ponto O .

5 Identidade de Tomihisa e teoremas clássicos de geometria projetiva

5.1 Identidade de Tomihisa

Nesta secção, exploramos uma outra identidade de álgebras de Lie que permitirá demonstrar teoremas clássicos de geometria projetiva. Esta identidade, que denominamos por identidade de Tomihisa (IT), é válida para álgebras de Lie reais tridimensionais e foi provada em Tomihisa [9] no contexto das formas quadráticas. Refira-se que é possível encontrar na literatura especializada em álgebras, referências anteriores a esta identidade (ver por exemplo [7]).

Identidade de Tomihisa

Para qualquer álgebra de Lie real, tridimensional é válida a igualdade:

$$[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] + [F_5, [[F_2, F_1], [F_4, F_3]]] + [F_3, [[F_2, F_5], [F_4, F_1]]] = 0, \quad (21)$$

com F_i elementos da álgebra.

Exemplos de tais álgebras são $(\mathfrak{so}(3), [,])$, $(\mathcal{Q}, \{, \})$ e $(\mathfrak{sl}(2), [,])$. Na demonstração que se segue apresentamos apenas a prova para $(\mathfrak{sl}(2), [,])$, uma vez que o raciocínio é análogo para $(\mathfrak{so}(3), [,])$, e para $(\mathcal{Q}, \{, \})$ a prova é apresentada em Tomihisa [9].

Note-se que em (IT) os índices 2 e 4 são fixos enquanto que os índices 1,3,5 permutam ciclicamente.

Prova da Identidade de Tomihisa. Como já vimos no Exemplo 2, os elementos de $\mathfrak{sl}(2)$ são gerados pela base

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que satisfaz

$$[I_1, I_2] = 2I_2, \quad [I_1, I_3] = -2I_3, \quad [I_2, I_3] = I_1.$$

Dada a bilinearidade do parêntesis de Lie basta demonstrarmos a identidade para os elementos de uma base de $\mathfrak{sl}(2)$. Consideremos dois casos: (1) $[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] \neq 0$ e (2) $[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] = 0$.

- (1) Quando $[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] \neq 0$ então $[[F_2, F_3], [F_4, F_5]] \neq 0$. Os valores de F_2, F_3, F_4, F_5 devem ser I_1, I_2, I_3 . Vamos tomar $F_2 = I_1$. Se I_1 pertence ao conjunto $\{F_3, F_4, F_5\}$ não pode ser F_3 (devido à antissimetria do parêntesis de Lie) Logo deve ser F_4 , ou F_5 . Então

$$[[I_1, I_2], [I_1, I_3]] = [2I_2, -2I_3] = -4I_1$$

Se I_1 não pertence ao conjunto $\{F_3, F_4, F_5\}$, então

$$\begin{aligned} [[I_1, I_2], [I_2, I_3]] &= [2I_2, I_1] = -4I_2 \\ [[I_1, I_3], [I_2, I_3]] &= [-2I_3, I_1] = -4I_3 \end{aligned}$$

Para o primeiro termo em (21) ser diferente de zero, devemos considerar os 6 casos seguintes:

- a) $[I_2, [[I_1, I_2], [I_1, I_3]]] = [I_2, -4I_1] = 8I_2,$
- b) $[I_3, [[I_1, I_2], [I_1, I_3]]] = [I_3, -4I_1] = -8I_3,$
- c) $[I_1, [[I_1, I_2], [I_2, I_3]]] = [I_1, -4I_2] = -8I_2,$
- d) $[I_3, [[I_1, I_2], [I_2, I_3]]] = [I_3, -4I_2] = 4I_1,$

- e) $[I_1, [[I_1, I_3], [I_2, I_3]]] = [I_1, -4I_3] = 8I_3,$
f) $[I_2, [[I_1, I_3], [I_2, I_3]]] = [I_2, -4I_3] = -4I_1.$

Analisando o segundo e terceiro termo de (21) para cada caso temos:

- a) $[I_2, [[I_1, I_2], [I_1, I_3]]] = 8I_2,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_2], [I_1, I_2]]] = 0 \quad [I_2, [[I_1, I_3], [I_1, I_2]]] = -8I_2$$

- b) $[I_3, [[I_1, I_2], [I_1, I_3]]] = -8I_3,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_3], [I_1, I_2]]] = 8I_3 \quad [I_2, [[I_1, I_3], [I_1, I_3]]] = 0$$

- c) $[I_1, [[I_1, I_2], [I_2, I_3]]] = -8I_2,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_1], [I_2, I_2]]] = 0 \quad [I_2, [[I_1, I_3], [I_2, I_1]]] = 8I_2$$

- d) $[I_3, [[I_1, I_2], [I_2, I_3]]] = 4I_1,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_3], [I_2, I_2]]] = 0 \quad [I_2, [[I_1, I_3], [I_2, I_3]]] = -4I_1$$

- e) $[I_1, [[I_1, I_3], [I_2, I_3]]] = 8I_3,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_1], [I_2, I_3]]] = 0 \quad [I_3, [[I_1, I_3], [I_2, I_1]]] = -8I_3$$

- f) $[I_2, [[I_1, I_3], [I_2, I_3]]] = -4I_1,$ então

$$[I_3, [[I_1, I_2], [I_2, I_3]]] = 4I_1 \quad [I_3, [[I_1, I_3], [I_2, I_2]]] = 0$$

1. Quando $[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]] = 0$ precisamos de verificar se o segundo ou terceiro termo de (21) é diferente de zero. Nessa situação, estamos nos casos tratados anteriormente.

□

5.2 Interpretação geométrica da Identidade de Tomihisa

Nesta secção iremos usar a notação da página 17 válida para $(\mathcal{Q}, \{, \}, \langle, \rangle_{\mathcal{Q}})$, $(\mathbb{R}^3, \bar{\lambda}, \langle, \rangle_H)$ e $(\mathfrak{sl}(2), [,], \langle, \rangle_{\mathfrak{sl}(2)})$ onde o parêntesis de Lie é sempre denotado por $[,]$. Mais precisamente, recorde-se:

- $[A, B] \rightsquigarrow$ denota o ponto dual da reta que passa pelos pontos A e B ;
- $[[A, B], [C, D]] \rightsquigarrow$ denota o ponto de interseção das retas AB e CD .

Podemos pensar em cada termo da igualdade de Tomihisa como a projeção de um vetor de \mathbb{R}^3 em \mathbb{RP}^2 , e portanto a IT é equivalente a dizer que esses vetores são linearmente dependentes. Mais precisamente,

$$\underbrace{[F_1, [[F_2, F_3], [F_4, F_5]]]}_{\mathbf{u}} + \underbrace{[F_5, [[F_2, F_1], [F_4, F_3]]]}_{\mathbf{v}} + \underbrace{[F_3, [[F_2, F_5], [F_4, F_1]]]}_{\mathbf{w}} = 0,$$

os pontos projetivos $\pi(\mathbf{u})$, $\pi(\mathbf{v})$ e $\pi(\mathbf{w})$ são colineares (onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é a projeção). Como já vimos, se esses 3 pontos são colineares, então as suas retas duais, $\pi(\mathbf{u})^*$, $\pi(\mathbf{v})^*$ e $\pi(\mathbf{w})^*$, são concorrentes. Interpretando geometricamente, estas retas duais são as retas $F_1((F_2F_3) \cap (F_4F_5))$, $F_5((F_2F_1) \cap (F_4F_3))$ e $F_3((F_2F_5) \cap (F_4F_1))$, onde estamos a interpretar cada F_i como um ponto do plano projetivo (ver Figura 9 à direita).

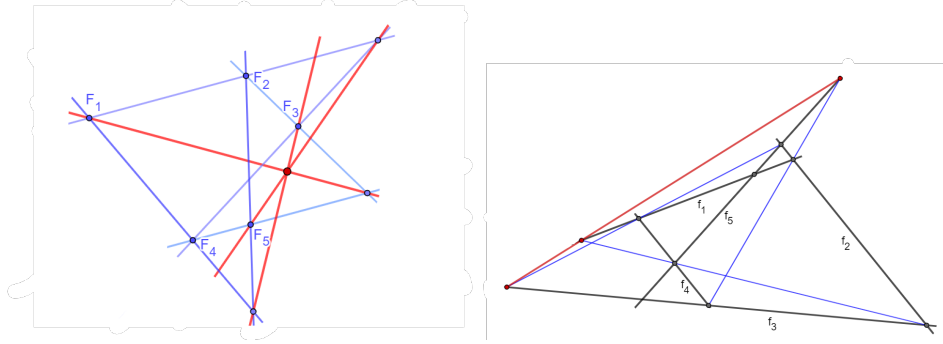


Figura 9: Identidade de Tomihisa. À esquerda os 5 pontos F_i dão-nos 3 retas concorrentes (a vermelho), e à direita as 5 retas f_i dão-nos 3 pontos colineares (a vermelho).

Também podemos interpretar esta igualdade em relação ao dual de cada ponto. Neste caso começaríamos o enunciado com 5 retas f_i e obtínhamos que os pontos $f_1 \cap ((f_2 \cap f_3) \cap (f_4 \cap f_5))$, $f_5 \cap ((f_2 \cap f_1) \cap (f_4 \cap f_3))$ e $f_3 \cap ((f_2 \cap f_5) \cap (f_4 \cap f_1))$ são colineares, como se representa na Figura 9 do lado direito.

5.3 Teorema de Pappus

O Teorema de Pappus é um dos teoremas clássicos da geometria projetiva no plano. Nesta secção apresentamos o resultado em Aicardi [1] que mostra

que o Teorema de Pappus é equivalente à identidade de Tomihisa.

Teorema 2 (Teorema de Pappus). *Dados dois triplos de pontos colineares (A, B, C) e (A', B', C') , em retas distintas, então os pontos de interseção $P = BC' \cap B'C$, $N = AC' \cap A'C$ e $M = AB' \cap A'B$ são colineares.*

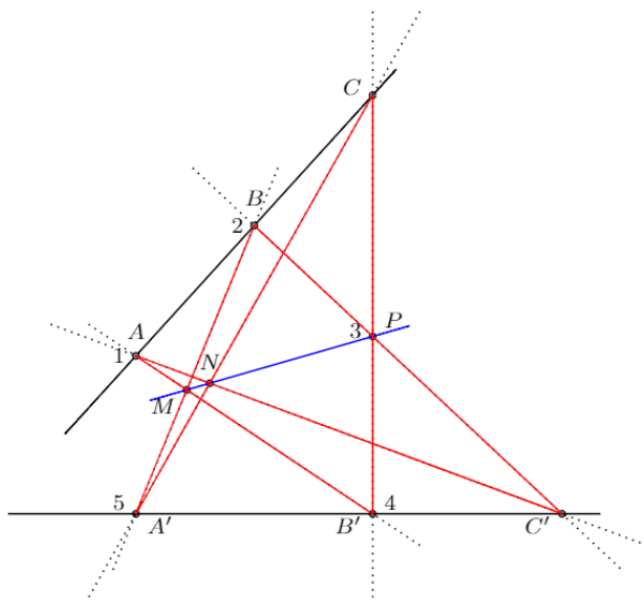


Figura 10: Teorema de Pappus: O hexágono inscrito $AB'CA'BC'$ e os pontos diagonais P, N, M . O número i na imagem representa F_i na IT.

Proposição 5 (Aicardi [1]). *O teorema de Pappus é equivalente à identidade de Tomihisa (21).*

Demonstração. Escolhendo os pontos seguintes para aplicar a identidade de Tomihisa (como está representado na Figura 10)

$$F_1 = A, \quad F_2 = B, \quad F_3 = P, \quad F_4 = B', \quad F_5 = A',$$

onde $P = BC' \cap B'C$. Temos,

$$0 = [A, [[B, P], [B', A']]] + [A', [[B, A], [B', P]]] + [P, [[B, A'], [B', A]]],$$

Interpretamos o resultado com auxílio a (17), temos que

$$\begin{aligned} [[B, P], [B', A']] &= BP \cap B'A' = C', \quad [[B, A], [B', P]] = BA \cap B'P = C, \\ [[B, A'], [B', A]] &= BA' \cap B'A = M. \end{aligned}$$

Logo, a identidade reduz a

$$0 = [A, C'] + [A', C] + [P, M].$$

Isto significa que as pré-imagens (por π) dos vetores $[A, C']$, $[A', C]$, $[P, M]$ são coplanares, logo as retas PM , AC' e $A'C$ são concorrentes no ponto $N = AC' \cap A'C$. Mas isto é equivalente a dizer que N está na reta PM , logo P , M e N são colineares. □

Por dualidade é igualmente válido o seguinte teorema.

Teorema 3 (dual do teorema de Pappus). *Dados dois triplos de retas concorrentes (a, b, c) e (a', b', c') , então as 3 retas $((a \cap b')(a' \cap b))$, $((a \cap c')(a' \cap c))$ e $((b \cap c')(b' \cap c))$ são concorrentes.*

5.4 Teorema de Desargues

A relação entre o teorema de Pappus e o de Desargues é bem conhecida desde o início do século XX (Hessenberg [3]), contudo só em 1976 se considera que a prova do resultado "Pappus implica Desargues" tenha sido corrigida por Seidenberg [5]. O leitor interessado quer na relevância do teorema de Pappus e sua relação com o teorema de Desargues poderá consultar [4].

A prova apresentada por Seidenberg [5] de que o teorema de Pappus implica o de Desargues usa a abordagem de projetividades, a qual pode traduzir-se por três aplicações sucessivas do teorema de Pappus (i.e. da identidade de Tomihisa), tal como apresentamos de seguida.

Teorema 4 (Desargues). *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ estão em perspectiva em relação a um centro O se e só se estão em perspectiva em relação a um eixo. Ou seja, as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes em O se e só se os pontos $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ e $C'' = AB \cap A'B'$ são colineares.*

Demonstração 2. *Para demonstrar este resultado vamos usar três vezes a demonstração do teorema de Pappus, aplicada a conjuntos de retas distintos.*

i) Sejam $O = AA' \cap BB'$ e $X = BC \cap A'C'$. Os pontos B', B, O são colineares tais como X, C', A' . Então, aplicando o raciocínio da prova do teorema de Pappus aos seguintes pontos

$$F_1 = B', \quad F_2 = B, \quad F_3 = C'O \cap A'B = Y, \quad F_4 = C', \quad F_5 = X, \quad (22)$$

obtemos a colinariedade dos seguintes pontos:

$$Y, \quad OX \cap A'B' = Z, \quad B'C' \cap BX = B'C' \cap BC = A''. \quad (23)$$

ii) Os pontos A, A', O são colineares, tal como X, C, B , por definição de O e X respectivamente. Mais uma vez, aplicando a IT aos pontos

$$F_1 = A, \quad F_2 = A', \quad F_3 = CO \cap A'B = \tilde{Y}, \quad F_4 = C, \quad F_5 = X, \quad (24)$$

obtemos a colinariedade dos pontos

$$\tilde{Y}, \quad OX \cap AB = W, \quad AC \cap A'X = AC \cap A'C' = B''. \quad (25)$$

iii) Por definição de \tilde{Y} em (24) os pontos B, A', \tilde{Y} são colineares. Mais, os pontos Z, X, W são também colineares pois, por (23) e (25), também estão na reta OX . Mais uma vez aplicando IT com

$$F_1 = B, \quad F_2 = \tilde{Y}, \quad F_3 = A'X \cap \tilde{Y}W, \quad F_4 = X, \quad F_5 = Z$$

temos a colinariedade de

$$F_3, \quad A'Z \cap BW, \quad BX \cap Z\tilde{Y}. \quad (26)$$

Mostremos agora que em (26), os pontos são B'', C'', \tilde{A} , e seguidamente mostre-se que $\tilde{A} = A''$ se e só se $Y = \tilde{Y}$.

Por definição de X , $A'X = A'C'$. Além disso, de (25), segue que B'' pertence a $\tilde{Y}W$ e a $A'C'$. Logo,

$$F_3 = A'X \cap \tilde{Y}W = A'C' \cap \tilde{Y}W = B''.$$

Por outro lado, por definição de Z (em (23)) a reta $A'Z = A'B'$, e como, por (25), W pertence a AB temos

$$A'Z \cap BW = A'B' \cap BA = C''.$$

Finalmente, por definição de X , $BX = BC$ e portanto

$$BX \cap Z\tilde{Y} = BC \cap Z\tilde{Y} = \tilde{A}. \quad (27)$$

Se mostrarmos que $\tilde{A} = A''$ se e só se $Y = \tilde{Y}$ finalizamos a prova, já que

$$Y = \tilde{Y} \iff CO \cap A'B = C'O \cap A'B,$$

o que significa que C, C', O são colineares. Equivalentemente, $O = AA' \cap BB'$ está na reta CC' . Ou seja, os triângulos estão em perspectiva em relação ao centro O se e só se A'', B'', C'' são colineares.

Mostremos agora a equivalência: $Y = \tilde{Y} \iff \tilde{A} = A''$.

- Seja $Y = \tilde{Y}$, então

$$\tilde{A} \stackrel{(27)}{=} Z\tilde{Y} \cap BX \stackrel{ii)}{=} Z\tilde{Y} \cap BC = ZY \cap BC \stackrel{(23)}{=} A''.$$

- Seja $\tilde{A} = A''$. Como $\tilde{A} = Z\tilde{Y} \cap BC$ e $A'' = ZY \cap BC$, as retas $Z\tilde{Y}$ e ZY interseccionam-se no mesmo ponto na reta BC . Portanto \tilde{Y} e Y são colineares com Z e $A'' = \tilde{A}$. Por outro lado, \tilde{Y} e Y pertencem ambos à reta $A'B$ por (22) e (24) respectivamente. Como existe um único ponto de interseção de $A'B$ com ZA'' , temos $Y = \tilde{Y}$.

Nas figuras seguintes ilustram-se os vários passos da demonstração do teorema de Desargues.

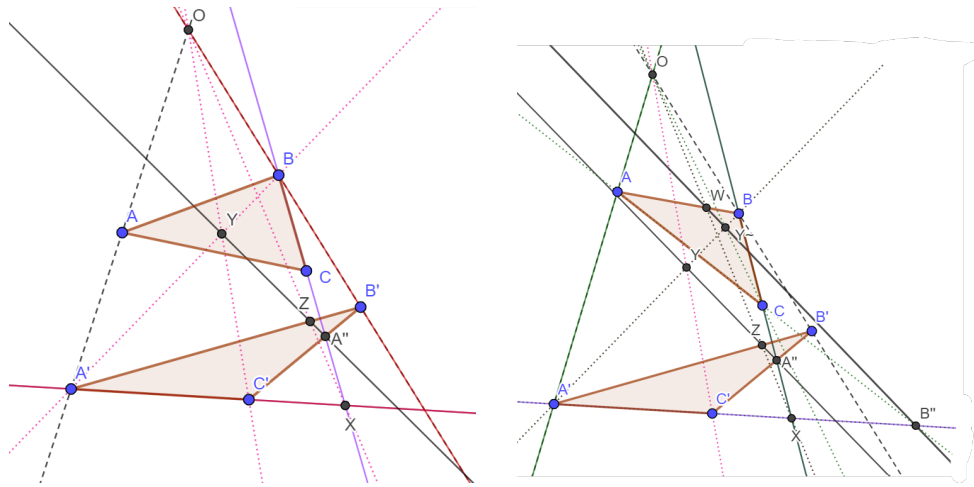


Figura 11: Passos (i) e (ii) da prova do Teorema de Desargues

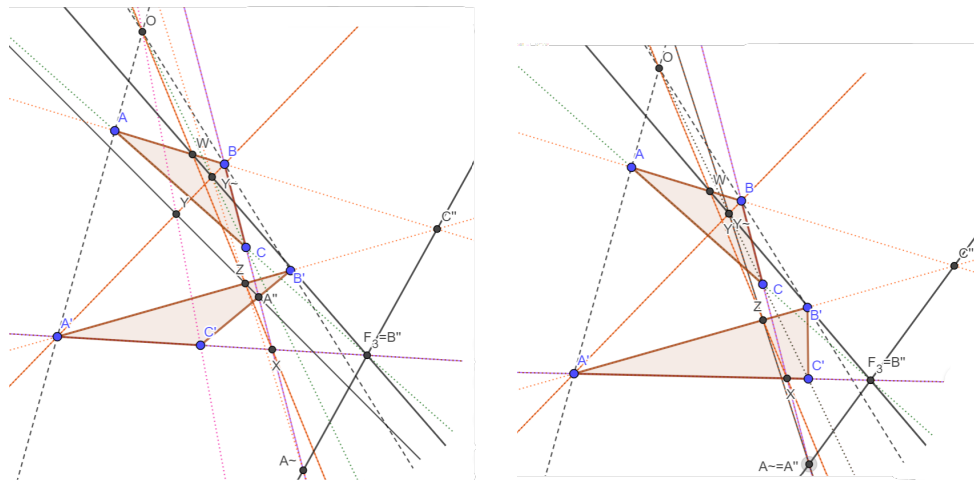


Figura 12: Passo (iii) da prova do teorema de Desargues e aspeto final do teorema: $AA' \cap BB' \cap CC' = O$ é equivalente a $Y = \tilde{Y}$ que é equivalente a A'', B'' e C'' serem colineares.

5.5 Teoremas para cónicas

Nesta secção pretendemos verificar que a identidade de Tomihisa pode igualmente ser usada para provar teoremas bem conhecidos para cónicas projetivas. Começamos por introduzir algumas noções básicas sobre cónicas.

5.5.1 Cónicas

Uma cónica no plano é o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem

$$ax^2 + by^2 + dxy + ex + fy + c = 0,$$

em que pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e, f é não nulo. Podemos escrever em coordenadas homogêneas $[X : Y : Z] \in \mathbb{RP}^2$ tomando $(x, y) = (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0. \quad (28)$$

Seis pontos projetivos $P_i = [x_i : y_i : z_i]$, $i = 1, \dots, 6$, estão na mesma cónica se satisfazem a equação (28). Ou seja, se satisfazem o seguinte sistema homogêneo de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff A\mathbf{x} = 0.$$

Este sistema tem uma solução não nula se e só se $\det(A) = 0$. Usando um sistema de computação simbólica como o *Mathematica*, ou a referência [6], o $\det(A)$ pode ser escrito como uma soma de determinantes de matrizes 3×3 como se segue.

$$\begin{aligned} \det A &= |P_1, P_3, P_5| |P_2, P_4, P_5| |P_4, P_6, P_1| |P_6, P_2, P_3| \\ &\quad - |P_2, P_4, P_6| |P_1, P_4, P_5| |P_3, P_6, P_1| |P_5, P_2, P_3|, \end{aligned}$$

onde $|P_i, P_j, P_k|$ denota o determinante de uma matriz 3×3 cujas colunas são as coordenadas de P_i, P_j, P_k . Portanto,

Lema 1. *Seis pontos projetivos $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ estão numa cónica se e só se*

$$\begin{aligned} &|P_1, P_3, P_5| |P_2, P_4, P_5| |P_4, P_6, P_1| |P_6, P_2, P_3| \\ &= |P_2, P_4, P_6| |P_1, P_4, P_5| |P_3, P_6, P_1| |P_5, P_2, P_3|. \end{aligned} \quad (29)$$

A equação (29) pode definir uma cónica degenerada ou não. Mais precisamente, suponha-se que 3 pontos de $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ são colineares. Sem perda de generalidade, sejam P_1, P_3, P_5 colineares. então o membro do lado esquerdo de (29) é zero e portanto, a equação reduz-se a

$$|P_2, P_4, P_6| |P_1, P_4, P_5| |P_3, P_6, P_1| |P_5, P_2, P_3| = 0.$$

Se $|P_2, P_4, P_6| = 0$ então P_2, P_4 e P_6 são colineares, caso contrário temos 3 casos:

- $|P_1, P_4, P_5| = 0 \implies P_4$ pertence à reta P_1, P_5 , i.e. P_1, P_3, P_5, P_4 colineares.
- $|P_3, P_6, P_1| = 0 \implies P_6$ pertence à reta P_1, P_3 , i.e. P_1, P_3, P_5, P_6 colineares.
- $|P_5, P_2, P_3| = 0 \implies P_2$ pertence à reta P_3, P_5 , i.e. P_1, P_3, P_5, P_2 colineares.

Em qualquer dos casos, a cónica é degenerada (duas retas) se S contém pelo menos 3 pontos colineares.

Lema 2. *Sejam P_1, P_2, \dots, P_5 cinco pontos no plano projetivo tais que nenhuns 3 dos quais são colineares. Então, esses pontos definem uma cónica não-degenerada.*

Observação 4. *De facto, 5 pontos impõem 5 equações lineares sobre os coeficientes a, b, c, d, e , que dão origem a uma única solução.*

5.5.2 Teorema de Pascal

O célebre teorema de Pascal, também conhecido pelo teorema *hexagrammum mysticum*, diz respeito a um hexágono inscrito numa cónica projetiva. Recorde-se, que um hexágono em \mathbb{RP}^2 é a figura formada por seis pontos distintos A, B, C, D, E, F (por esta ordem) chamados vértices. Os lados do hexágono $ABCDEF$ são as retas AB, BC, CD, DE, EF e FA . Os três pares de lados AB e DE , BC e EF , e CD e FA dizem-se pares de lados opostos. Nesta secção pretendemos mostrar como identidades de um parêntesis de Lie permitem a demonstração deste e outros teoremas para cónicas.

Teorema 5 (Teorema de Pascal). *Sejam $Q_1, Q_2, \dots, Q_6 \in \mathbb{RP}^2$ pontos distintos. Se o hexágono $Q_1Q_2Q_3Q_6Q_5Q_4$ está inscrito numa cónica, então os 3 pontos de interseção dos pares de lados opostos K_1, K_2, K_3 são colineares. Ou seja,*

$$K_1 = Q_1Q_5 \cap Q_2Q_4, \quad K_2 = Q_1Q_6 \cap Q_3Q_4, \quad K_3 = Q_2Q_6 \cap Q_3Q_5, \quad (30)$$

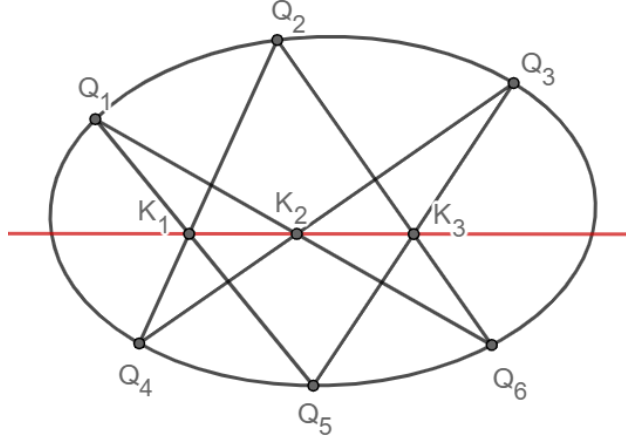


Figura 13: Teorema de Pascal

são colineares (ver a Figura 13).

Note-se que teorema de Pappus é, na verdade, um caso particular deste teorema, para o caso em que a cônica é degenerada (duas retas).

Em Tomihisa [9] é apresentada uma demonstração deste teorema e de outros teoremas para cônicas fazendo uso extensivo do produto interno (8) nas formas quadráticas. Usando esta abordagem iremos aplicar a identidade de Tomihisa na prova do teorema de Pascal.

A proposição que se segue estabelece uma série de resultados essenciais na demonstração do teorema de Pascal.

Proposição 6. *Sejam Q_i formas quadráticas $Q_i = x_i p^2 + 2y_i p q + z_i q^2$, com o parêntesis de Poisson canônico no plano (q, p) representado por $[,]$ e $\langle , \rangle_{\mathcal{Q}}$ definido em (8). Então,*

$$a) \quad [[Q_1, Q_2], [Q_1, Q_3]] = 2^4 \langle Q_1, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot Q_1. \quad (31)$$

$$b) \quad \langle Q_1, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = 2 \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{x_1 - z_1}{2} & \frac{x_2 - z_2}{2} & \frac{x_3 - z_3}{2} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{x_1 + z_1}{2} & \frac{x_2 + z_2}{2} & \frac{x_3 + z_3}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$c) \quad \langle Q_1, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = -\langle Q_2, [Q_1, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = -\langle Q_3, [Q_2, Q_1] \rangle_{\mathcal{Q}}. \quad (33)$$

d)

$$\begin{aligned} \langle [[Q_3, Q_2], [Q_1, Q_6]], [Q_5, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} &= \langle [[Q_3, Q_4], [Q_5, Q_6]], [Q_1, Q_2] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &\quad - \langle [[Q_5, Q_2], [Q_3, Q_6]], [Q_1, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Demonstração. Os itens a) e b) são facilmente obtidos através de cálculos elementares.

- c) tendo em conta o item b) e as propriedades do determinante, as igualdade em (33) são imediatas.
- d) Calculando o produto interno de Q_6 com a expressão da identidade de Tomihisa, e usando bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle Q_6, [Q_1, [[Q_2, Q_3], [Q_4, Q_5]]] \rangle_{\mathcal{Q}} &+ \langle Q_6, [Q_5, [[Q_2, Q_1], [Q_4, Q_3]]] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &+ \langle Q_6, [Q_3, [[Q_2, Q_5], [Q_4, Q_1]]] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0. \end{aligned}$$

Usando c) podemos reescrever a igualdade como

$$\begin{aligned} -\langle [[Q_2, Q_3], [Q_4, Q_5]], [Q_1, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} &- \langle [[Q_2, Q_1], [Q_4, Q_3]], [Q_5, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &- \langle [[Q_2, Q_5], [Q_4, Q_1]], [Q_3, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0. \end{aligned}$$

Aplicando de novo o item c) e a antissimetria de $[\cdot, \cdot]$, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \langle [[Q_3, Q_2], [Q_1, Q_6]], [Q_5, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} &- \langle [[Q_3, Q_4], [Q_5, Q_6]], [Q_1, Q_2] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &+ \langle [[Q_5, Q_2], [Q_3, Q_6]], [Q_1, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0. \end{aligned}$$

□

Prova do teorema de Pascal. Tendo em conta a notação introduzida na página 17, os pontos K_1 , K_2 e K_3 são:

$$K_1 := [[Q_2, Q_4], [Q_1, Q_5]], \quad K_2 := [[Q_1, Q_6], [Q_3, Q_4]], \quad K_3 := [[Q_3, Q_5], [Q_2, Q_6]]$$

Os pontos K_1 , K_2 e K_3 são colineares se e só se $\langle [K_2, K_3], K_1 \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$ (ou seja K_1 está na reta K_2K_3). Ou seja,

$$\langle [[[Q_3, Q_5], [Q_2, Q_6]], [[Q_1, Q_6], [Q_3, Q_4]]], [[Q_2, Q_4], [Q_1, Q_5]] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Aplicando (34), a igualdade acima é equivalente a

$$\begin{aligned} & \langle \langle \langle [Q_3, Q_5], [Q_1, Q_5] \rangle_{\mathcal{Q}}, \langle [Q_2, Q_4], [Q_3, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}}, \langle [Q_1, Q_6], [Q_2, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} \rangle_{\mathcal{Q}} \\ & - \langle \langle \langle [Q_1, Q_5], [Q_1, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}}, \langle [Q_3, Q_5], [Q_3, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}}, \langle [Q_2, Q_4], [Q_2, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} \rangle_{\mathcal{Q}} = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

onde, no segundo termo também foi aplicado (33). Agora, por (31) a identidade (35) fica

$$\begin{aligned} & 2^{12} \cdot \langle Q_5, [Q_3, Q_1] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_4, [Q_2, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_6, [Q_1, Q_2] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_6, [Q_5, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} \\ & - 2^{12} \cdot \langle Q_1, [Q_5, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_3, [Q_5, Q_4] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_2, [Q_4, Q_6] \rangle_{\mathcal{Q}} \cdot \langle Q_2, [Q_1, Q_3] \rangle_{\mathcal{Q}} = 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta (32), ou seja, $\langle Q_i, [Q_j, Q_k] \rangle_{\mathcal{Q}} = 2 |Q_i, Q_j, Q_k|$, e comparando a equação acima com (29), no lema 1, obtemos que os 6 pontos estão na mesma cônica. \square

5.5.3 Recíproco do teorema de Pascal: Braikenridge-Maclaurin

É fácil perceber da prova do teorema de Pascal que o recíproco desse teorema é igualmente válido. Ou seja, se os 3 pontos K_1, K_2, K_3 em (30) são colineares, então o hexágono $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ está inscrito numa cônica. Este teorema é conhecido por *teorema de Braikenridge-Maclaurin* e fornece uma forma de identificar uma cônica a partir de 5 pontos dados. Esta construção é conhecida por *construção de Braikenridge-Maclaurin* (ver Figura 28). Mais precisamente, sejam Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 dados, os pontos da cônica definida por estes 5 pontos são obtidos da seguinte forma:

1. Escolhemos dois pontos, por exemplo, Q_1, Q_2 , e para cada um, construímos 3 retas que contêm o ponto e os restantes pontos. Ou seja, $(Q_1; Q_3, Q_4, Q_5)$ e $(Q_2; Q_3, Q_4, Q_5)$;
2. Traçamos as retas Q_3Q_4 e Q_4Q_5 e o ponto $P = Q_1Q_3 \cap Q_2Q_5$;
3. Tomando qualquer reta x a passar pelo ponto Q_1 , designamos por M a interseção de x com Q_4Q_5 ;
4. Consideramos a reta PM e tomamos N como a interseção de PM com Q_3Q_4 ;
5. Tomando $Q_6 = x \cap NQ_2$, temos que NPM é a reta de Pascal de $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$, logo estes pontos estão inscritos numa cônica, ou por outras palavras, Q_6 está na cônica unicamente determinada por Q_1, Q_2, \dots, Q_5 .

Note-se que nesta construção apenas fazemos rodar a reta x em torno de Q_1 (ou equivalentemente, variar M ao longo de Q_4Q_5), logo variando x podemos obter todos os pontos na cônica.

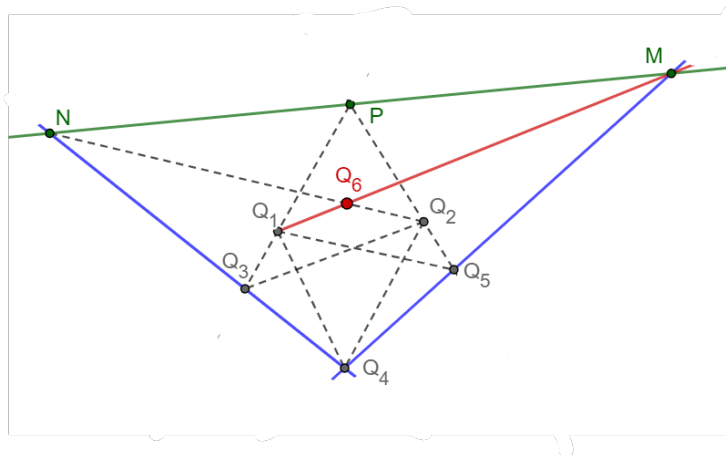


Figura 14: 5 pontos Q_1, \dots, Q_5 definem uma cônica. Construção do ponto Q_6 na cônica. A reta de Pascal está representada a verde. A reta x (vermelha) que passa por Q_1 é arbitrária. Variando x (ou seja, variando M) os pontos Q_6 desenharam a cônica.

5.5.4 Dual do teorema de Pascal: Brianchon

A título de curiosidade, também podemos apresentar o teorema de Brianchon.

Teorema 6. *Dado um hexágono circunscrito numa cônica, as suas diagonais (retas definidas por vértices opostos) são concorrentes num ponto. (ver Figura 15)*

Este é o dual do teorema de Pascal. Para demonstrar tal resultado, está subjacente o seguinte lema, cuja prova pode ser consultada em Tomihisa [9].

Lema 3. *Um hexágono $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ está inscrito numa cônica se e só se o hexágono cujos lados são os duais dos vértices está circunscrito numa cônica.*

Tendo em mente o resultado anterior, obtemos o pretendido: se o hexágono $ABCDEF$ está circunscrito a uma cônica, o hexágono cujos vértices são os

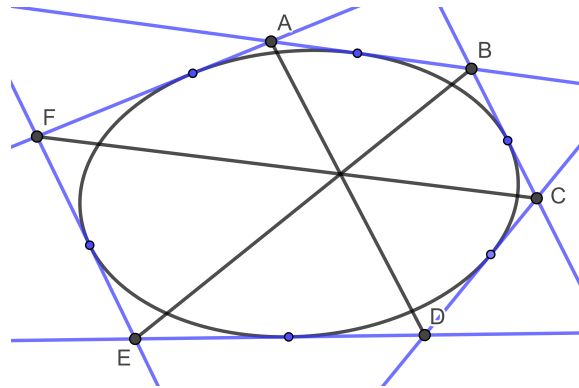


Figura 15: Teorema de Brianchon

duais dos lados do hexágono, i.e. $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ está inscrito numa cónica. Mas agora, por Pascal, K_1, K_2 e K_3 são colineares, logo, pelas propriedades de duais, os seus duais são concorrentes. Mas os seus duais são as diagonais AD, BE e FC .

Referências

- [1] Francesca Aicardi, *Projective geometry from Poisson algebras*, Journal of Geometry and Physics, 1574–1586 (2011).
- [2] V.I. Arnold, *Lobachevsky triangle altitude theorem as the Jacobi identity in the Lie algebra of quadratic forms on the symplectic plane*, J. of Geometry and Physics **53** (4), 421-427 (2005).
- [3] Hessenberg, G., *Beweis der Desargueschen Satzes aus den Pascalshen*, Math. Annalen, **61**, 161-172 (1905).
- [4] Elena A. Marchisotto, *The Theorem of Pappus: a Bridge Between Algebra and Geometry*, The American Mathematical Monthly, Vol. **109**, No. 6, (2002), 497-516.
- [5] Seidenberg, A., *Pappus implies Desargues*, Amer. Math. Monthly **83**, no. 3, 190-192 (1976).
- [6] Stefanović, Nedeljko and Milošević, Miloš, *A very simple proof of Pascal's hexagon theorem and some applications*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., Vol. **120**, No.5, 619–629, (2010).

- [7] Razmyslov, Y.P., Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero. *Algebra Logic* **12**, 4763 (1973).
- [8] Tabachnikov, Serge, *Projective configuration theorems: old wine into new wineskins*, in *Geometry in History*, Springer, 401–434 (2019).
- [9] Toshio Tomihisa, *Geometry of projective plane and Poisson structure*, *Journal of Geometry and Physics*, 673–684 (2009).