UNIVERSIDADE ABERTA
departamento de ciências exactas e tecnológicas
secção de matemática

NOTAS "FOOD FOR THOUGHT"

Fernando Pestana da Costa

fcosta@univ-ab.pt

Outubro 2008

"FOOD FOR THOUGHT" #1

FPC

2 de Outubro de 2008

A distinção entre as várias sub-disciplinas da matemática (como, de resto, noutras ciências) é um modo dos nossos espiritos limitados abarcarem e poderem compreender a totalidade.

Não se quer com isto dizer que as divisões sejam totalmente artificiais, já que há métodos, técnicas e problemas específicos de cada uma delas e que são distintos duma para outra. No entanto, não será demais relembrar que não há divisões estanques entre, digamos, a Análise, a Álgebra, a Geometria, a Topologia, as Probabilidades, a Teoria da Computação, etc, e, por vezes, um resultado ganha imenso em simplicidade e clarificação quando é observado sob perspectivas diferentes.

Esta breve nota pretende consubstanciar a observação anterior num contexto muito simples, que será acessível a todos os que tenham já estudado o apêndice sobre Indução Matemática (i.e., no final desta primeira semana lectiva: praticamente todos os estudantes!)

Números e Figuras

Há várias classes de números naturais que são interessantes e que têm intimas relações com a geometria discreta elementar. Uma dessas classes é a dos *números triangulares.* O n-ésimo número triangular é definido por

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A razão de ser deste nome e desta definição deverá ser clara após inspecção da Figura 1

Observe que o número triangular Δ_n é obtido do número triangular Δ_{n-1} por adição de n:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + n.$$

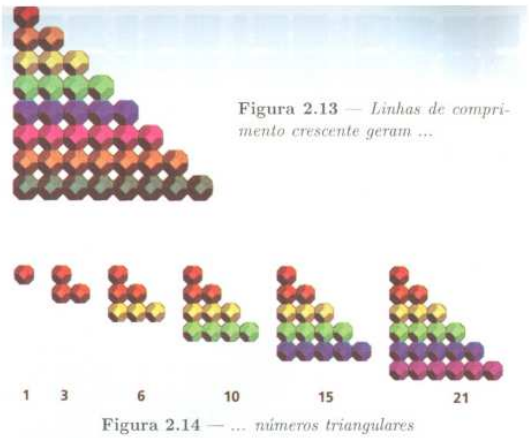


Figura 1: A geração dos números triangulares Δ_n $(n = 1, 2, \ldots, 6)$

Esta é uma propriedade fundamental quando tencionamos aplicar o método de indução para provar resultados envolvendo números triangulares.

Algumas propriedades dos números triangulares são particularmente simples e claras quando encaradas geometricamente, por exemplo:

1. A soma de dois números triangulares consecutivos é um número quadrado (cf. Figura 2), a saber $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$.

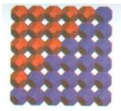


Figura 2: Ilustração da propriedade $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$ com $n = 6$.

Exercício 1. Prove a propriedade 1 *usando o método de indução.*

Observe que a propriedade 1 pode ser demonstrada *sem* recorrer ao método de indução, usando apenas manipulações algébricas elementares (faça-o!). Isto é, obviamente, típico: há, normalmente, mais do que uma maneira de obter um resultado, provar um teorema, resolver um problema. Convém estar atento a este facto, qualquer que seja a área de estudo em causa!

Outras propriedades dos números triangulares, tais como as enunciadas no Exercício 2 abaixo, têm uma interpretação geométrica igualmente óbvia, como se pode inferir da Figura 3:

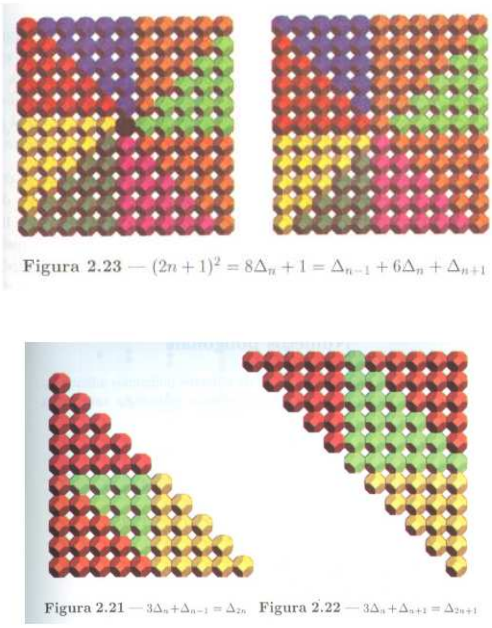


Figura 3: Ilustração geométrica de algumas propriedades dos números triangulares.

Exercício 2. Recorrendo ao *método de indução* conclua as propriedades ilustradas na Figura 3:

a) $8\Delta_n + 1 = (2n+1)^2$

b) $\Delta_{n-1} + 6\Delta_n + \Delta_{n+1} = (2n+1)^2$

c) $\Delta_{2n} = 3\Delta_n + \Delta_{n-1}$

d) $\Delta_{2n+1} = 3\Delta_n + \Delta_{n+1}$

Os números triangulares são apenas um dos muitos tipos de *números figurativos* que podem ser definidos (observem-se alguns deles na Figura 4). Muitas propriedades destes números podem ser consultadas no interessante e belíssimo livro [1] e provadas por métodos análogos aos dos exercícios acima.

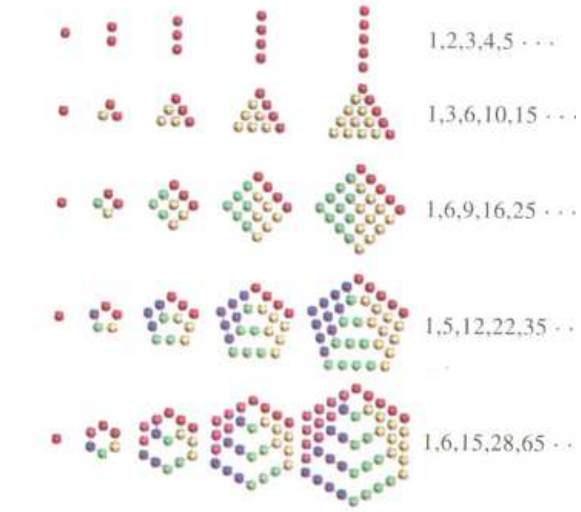


Figura 4: Exemplos de números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais.

Mais Álgebra e Geometria

Analogamente aos exemplos descritos na secção acima, muitas propriedades algébricas têm tradução geométrica e vice-versa. Um caso particularmente simples é a importante fórmula do binómio de Newton:

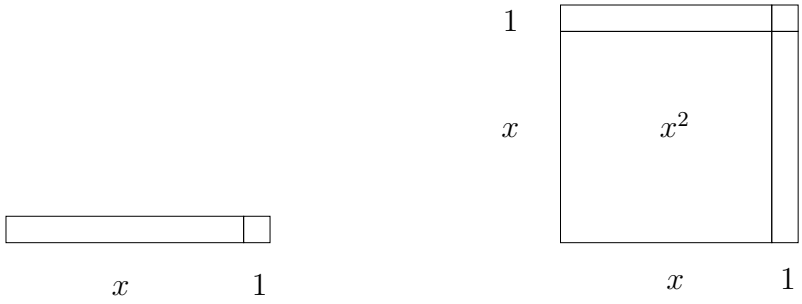
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}. \tag{1}$$

Esta expressão algébrica pode ser interpretada geometricamente do seguinte modo: para uma dada dimensão espacial $n \in \mathbb{N}$, a fórmula (1) relaciona o "volume" de um cubo de aresta $x+1$ com a soma dos "volumes" de um cubo de aresta x, de um cubo de aresta 1 e a de paralelipipedos adequados. Isto torna-se claro observando os casos de dimensão espacial $n = 1$ ("volume" = "comprimento") e de dimensão espacial $n = 2$ ("volume" = "área"), como se apresenta na Figura 5.

É interessante considerar o caso particular seguinte, $n = 3$:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \tag{2}$$

Este caso tem uma interpretação geométrica natural em termos de somas de volumes no espaço tridimensional da nossa experiência corrente.



$(x+1)^1 = x+1$ $\qquad$ $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

Figura 5: Ilustração geométrica do binómio de Newton para $(x+1)^n$, com $n=1$ e $n=2$.

Exercício 3. Esboce uma figura que ilustre geometricamente a propriedade (2).

É claro que a fórmula de Newton geral (1), na sua interpretação geométrica, dá-nos informações sobre a geometria de espaços de dimensão n arbitrária para os quais as limitações sensoriais dos humanos normais impedem-nos de ter qualquer espécie de intuição útil. O que, obviamente, não nos impede de raciocinar rigorosamente!...

Exercício 4. Recorrendo ao *método de indução* prove que a fórmula do binómio de Newton (1) é verdadeira para todos os $n \in \mathbb{N}$.

Referências

[1] John H. Conway, Richard K. Guy; *O Livros dos Números,* Colecção Gradiva/Universidade de Aveiro, vol. 6, Gradiva, Lisboa, 1999 (edição original: *The Book of Numbers,* Springer, New York, 1995)

"FOOD FOR THOUGHT" #2

FPC

9 de Outubro de 2008

As sucessões numéricas são, como se verificará ao longo de toda esta disciplina, um instrumento fundamental da Análise Matemática. Mas as sucessões são também importantes por si próprias, permitindo-nos ter um controle de processos ou entidades complexas através de processos ou entidades mais simples que constituem aproximações cada vez melhores à "coisa" complexa que verdadeiramente nos interessa. Deste ponto de vista, as sucessões são paradigmáticas do método analítico nas ciências e nas tecnologias.

Nesta nota pretendemos, de forma necessariamente muito breve, expôr dois contextos de aplicação das sucessões, intimamente relacionados entre si, um deles de grande importância histórica (a estimativa de π) e o outro particularmente activo no presente (o estudo dos fractais) e com imensas relações com variadas áreas da matemática, da física e de diversas tecnologias.

Polígonos Planos e Aproximações de π

O problema de determinar o perímetro de polígonos assentes num plano é algo que a civilização Humana domina desde tempos imemoriais e que cada um de nós sabe fazer desde a escola primária: basta, para cada polígono, saber medir, ou calcular, o comprimento entre dois vértices adjacentes e depois somar todas as parcelas. Se conhecermos um pouco de geometria analítica elementar podemos até calcular algebricamente o perímetro de figuras sem necessidade de as desenhar: basta saber o Teorema de Pitágoras para concluir imediatamente que a distância entre um ponto A de coordenadas (x_A, y_A) e um ponto B de coordenadas (x_B, y_B) é dada por $d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ (Figura 1).

O problema complica-se sobremaneira se a figura em causa não for limitada por segmentos de recta. Nem é sequer possível abordar aqui, mesmo que superficialmente, todas as facetas do problema que se coloca nesse caso. Podemos, no entanto, referir um caso que é particularmente importante na

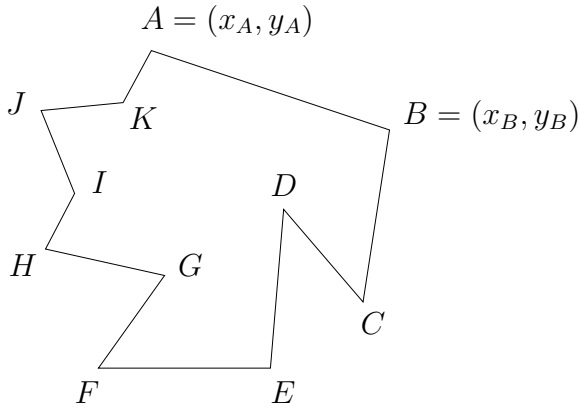


Figura 1: Exemplo de um polígono plano.

história da Humanidade e que ilustra bem a importância prática da sucessões como aproximações sucessivas: o caso da circunferência.

O problema de medir a circunferência, ou seja, de estabelecer a relação entre o comprimento, ou perímetro, de uma circunferência e o respectivo raio é um problema muito antigo e cujas primeiras abordagens matemáticas remontam à Grégia antiga, sendo Arquimedes (287 AC-212 AC) o primeiro grande matemático cujo nome ficou ligado a esta questão [4, Capítulo 13].

Para "medirmos a circunferência", no sentido dado acima, começamos por observar que a razão entre o comprimento de qualquer circunferência e o respectivo diâmetro é sempre o mesmo, independente da circunferência em causa. A essa razão constante, independente da circunferência particular que estamos a estudar, damos, modernamente, a designação π (Figura 2).

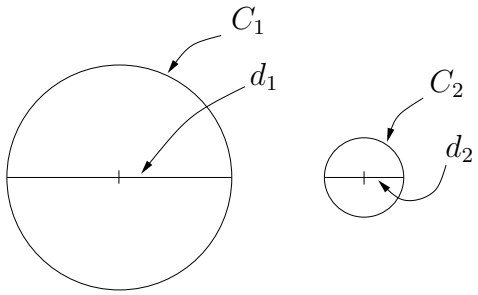


Figura 2: A definição geométrica de π, a razão entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro: $\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \pi$.

Portanto, "medir a circunferência" é o mesmo que "medir", ou determi-

nar, o valor de π. Esta constante é, como certamente saberão, um dos mais famosos números de toda a matemática, cuja importância em todos os seus ramos vai muito para além do que as suas modestas origens geométricas nos poderiam levar a crer [2].

E como poderemos medir π? A resposta geométrica, que remonta a Arquimedes, é a seguinte: podemos ter um conhecimento cada vez melhor de π aproximando a circunferência com polígonos com um número cada vez maior de lados. Exemplifiquemos isto começando com hexágonos regulares (Figura 3). É claro que, estando o hexágono inscrito na circunferência, o seu comprimento será menor que o comprimento desta e, portanto tem-se a seguinte estimativa[1] do valor de π:

$$\pi = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}} > \frac{\text{perímetro do hexágono}}{\text{diâmetro da circunferência}} = \frac{6r}{2r} = 3$$

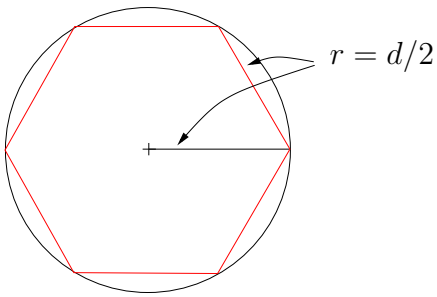


Figura 3: Aproximação da circunferência por um hexágono inscrito. Note que o perímetro do hexágono é $P_6 = 6r$, onde r é o raio da circunferência.

Para obtermos melhores resultados aumentemos o número de lados do polígono inscrito. Vejamos o que acontece se duplicarmos o número de lados construindo um polígono de 12 lados (dodecágono, ou 12-ágono) regular inscrito na circunferência. Temos que começar por determinar o comprimento do lado do polígono inscrito de 12 lados. Isto pode ser feito recorrendo apenas ao Teorema de Pitágoras e ao esquema da Figura 4:

[1] O valor $\pi = 3$ é referido (implicitamente) na Bíblia, em 1 Reis 7:23. Aproximações bem melhores eram conhecidas de Babilónios e Egípcios.

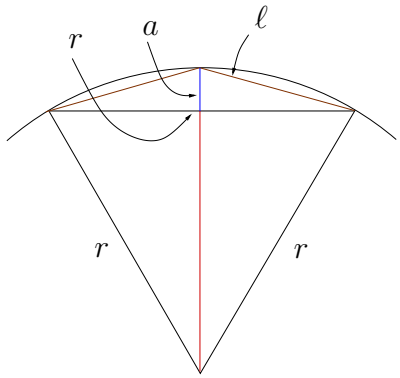


Figura 4: Construção do 12-ágono inscrito na circunferência de raio r a partir do hexágono inscrito.

Exercício 1. Prove que, na Figura 4, se tem: $a = r\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ e $\ell = r\frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}}{2}$. Conclua daqui que $\pi > 3,1058...$

Agora, naturalmente, podemos repetir o processo: a construção de um 24-ágono inscrito a partir do 12-ágono inscrito fornecer-nos-á uma melhor aproximação do valor de π.

Exercício 2. Esboce uma figura, semelhante à Figura 4, correspondente à construção do 24-ágono inscrito a partir do 12-ágono. Conclua que $\pi > 3,1077...$

Arquimedes, em cerca de 225 AC, continuou este processo de duplicação por mais duas etapas[2], conseguindo, a partir de um 96-ágono, a estimativa $\pi > 3,1408...$

Observe-se que estamos com este processo a obter os valores de uma sucessão p_n que aproxima π, a saber

[2]Note que Arquimedes não tinha nenhuma máquina para calcular raízes quadradas e nem sequer tinha notação numérica adequada: tente fazer cálculos em numeração romana (que é semelhante à numeração do tempo de Arquimedes) e depressa se aperceberá das dificuldades!...

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 3 \\
p_2 &= 3,1058\ldots \\
p_3 &= 3,1077\ldots \\
&\vdots \\
p_5 &= 3,1408\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pela própria construção de p_n trata-se de uma sucessão monótona crescente (já que, como consequência imediata do Teorema de Pitágoras, o lado de um k-ágono é menor que o dobro do lado de um $2k$-ágono—veja a Figura 4) e limitada superiormente (note que, por imposição da geometria da construção, todos os elementos de p_n satisfazem $p_n < \pi$). Portanto, pelo teorema 1.3.10 e sua demonstração, a sucessão será convergente para o supremo do conjunto dos seus termos, o qual é, certamente, não superior a π. De facto, pela definição geométrica de π, este é mesmo o limite da sucessão p_n.

Este processo de aproximação de linhas curvas por linhas poligonais serve de base à teoria da integração, um dos ramos fundamentais da Análise. Está também relacionado com a construção de linhas fractais, a que nos referiremos na secção seguinte.

Fractais

Na secção anterior tinhamos à partida uma linha (a circunferência) e, para determinarmos algumas das suas características (no caso, o seu comprimento), aproximámo-la por linhas mais simples (os polígonos) para os quais essa característica era conhecida.

Pode, no entanto, acontecer que mesmo o próprio objecto-limite seja "mal" conhecido e que o processo de aproximações sucessivas sirva, não apenas para estudá-lo, mas também para *defini-lo.*

Para que a observação acima comece a fazer algum sentido, considere-se

o seguinte processo:

Etapa 1:	Considere um triângulo equilátero T, cujo lado tem comprimento 1
Etapa 2:	Contraia T por um factor $\frac{1}{3}$ e cole 3 cópias do triângulo resultante no meio dos lados de T. Obtém uma região T_2
Etapa 3:	Contraia T por um factor $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ e cole $3 \cdot 4$ cópias do triângulo resultante no meio dos lados de T_2. Obtém uma região T_3
Etapa 4:	Contraia T por um factor $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ e cole $3 \cdot 4^2$ cópias do triângulo resultante no meio dos lados de T_3. Obtém uma região T_4
$\vdots$	

A Figura 5 pretende ilustrar geometricamente este processo.

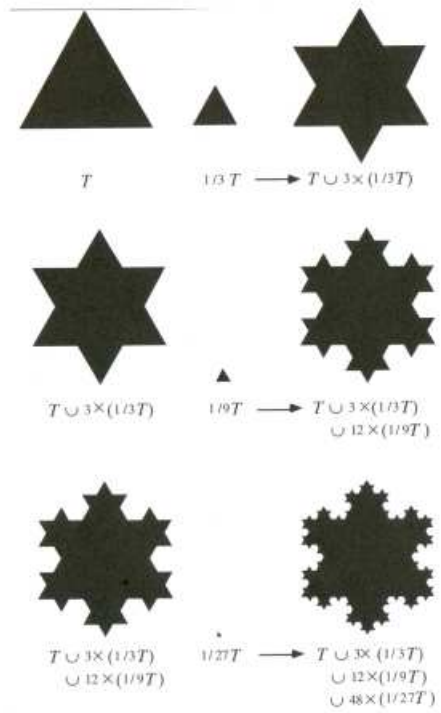


Figura 5: O processo de construção da ilha de Koch.

O processo iteractivo enunciado acima gera uma sucessão de figuras geométricas T_1, T_2, $T_3, \ldots, T_n, \ldots$, onde chamámos T_1 ao triângulo inicial T. Prosseguindo indefinidamente, pode-se pensar no subconjunto do plano que é obtido como limite deste processo. Tal conjunto é conhecido por "ilha de Koch", ou "floco de Koch" e, nestas notas, denotá-lo-emos por K. Note-se que, pela própria maneira como é definido, é *impossível* desenhar a "ilha de Koch" K: todas as representações geométricas que podemos fazer consistem, basicamente, em apresentar o esboço de um dos T_n com n escolhido suficientemente grande. Bem vistas as coisas, isto não é tão diferente assim do que se passa com a circunferência: os compassos não desenham circunferências matemáticas mas apenas esboços aproximados do conceito de circunferência!

É claro que para investigar as características de K teremos que utilizar o mesmo processo que serve para a própria definição de K e que já nos foi útil na secção anterior: determinar a característica em causa para os diversos conjuntos T_n e depois tentar concluir algo sobre o que acontece quando fazemos $n \to \infty$.

Ilustraremos esta abordagem com o cálculo do comprimento da fronteira de K. Comecemos por observar que a "ilha de Koch" K é um conjunto limitado pois pode ser incluído num triângulo equilátero quatro vezes maior que T, como se esboça na Figura 6:

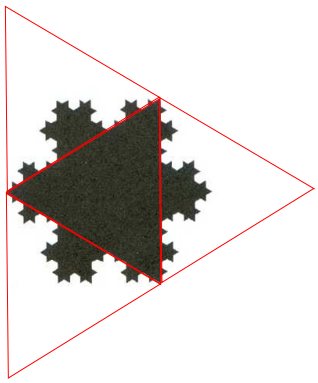


Figura 6: A inclusão da ilha de Koch num conjunto limitado obtido a partir do triângulo T.

Portanto, a área do conjunto K deverá ser inferior à área do grande triângulo a vermelho na Figura 6. A área deste último é quatro vezes a do triângulo original T. Como este é um triângulo equilátero com lado de comprimento 1, a sua área é igual a $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (deduza isto!). Assim, conclui-se

que a área[3] de K é certamente finita e é inferior a $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Isto, é claro, nada nos diz sobre aquilo que queremos saber, qual o comprimento da fronteira de K?

Um processo análogo ao que serviu, quer para medir a circunferência na Secção anterior, quer para *definir* o próprio conjunto K, serve agora para estudarmos o comprimento da linha que serve de fronteira K: calculamos o comprimento da fronteira de cada conjunto T_n, que designaremos por L_n, e obtemos o comprimento da fronteira de K como o valor limite da sucessão L_n quando $n \to \infty$.

Para determinar os valores de L_n para os primeiros valores de n, assim como para determinar a expressão geral de L_n, é útil atentarmos ao que o algoritmo da página 6 nos diz sobre a evolução da fronteira dos conjuntos T_n e que está geometricamente esquematizado na Figura 7.

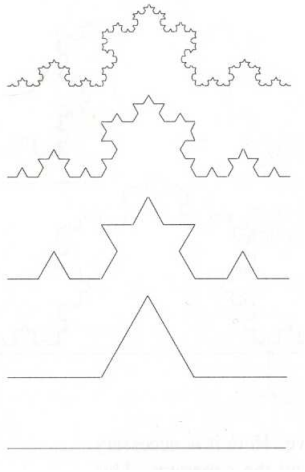


Figura 7: Esquema da evolução da fronteira dos conjuntos T_n.

Na posse desta intuição geométrica sobre a fronteira de T_n, considere o:

Exercício 3. Sendo L_n o comprimento da fronteira de T_n, conclua que:

a) $L_1 = 3 \times 1$

b) $L_2 = 3 \times \frac{4}{3}$

[3]Não é possível associar a todos os subconjuntos limitados do plano uma noção de área, ou seja, na linguagem dos matemáticos, nem todos os subconjuntos do plano são mensuráveis. Este é um problema profundo, tratado numa área da matemática designada por "Teoria da Medida" (com importantes ligações à Análise e às Probabilidades) e que claramente extravaza o nível da presente nota. Pode-se provar que o conjunto K não padece destes problemas de não-mensurabilidade.

c) $L_3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$

d) $L_4 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3$

Exercício 4. *Prove* que o comprimento da fronteira do conjunto T_n é dada por $L_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. Conclua que o comprimento da fronteira da "ilha de Koch" K é infinito!!

Repare que o resultado a que chegámos no fim do exercício anterior é verdadeiramente surpreendente: uma região limitada do plano, K, com área finita (não a calculámos mas vimos que é certamente inferior a 4) tem uma fronteira de comprimento infinito! Isto é claramente algo que a nossa intuição, construida a partir da experiência com polígonos, circunferências e outras curvas "simples", não nos levaria a pensar.

A fronteira da "ilha de Koch" é um exemplo do que se designa por conjunto fractal, os quais, *grosso modo* são conjuntos que, observados [estudados] a escalas diferentes têm sempre o mesmo aspecto [propriedades], uma característica designada na literatura científica por *auto-semelhança.*

Este tipo de comportamento é extremamente vulgar na natureza (dentro de determinadas gamas de escalas). Como um mero exemplo, atente na Figura 8 onde são apresentadas quatro fotos, sucessivamente aumentadas, de porções de uma couve-flôr.

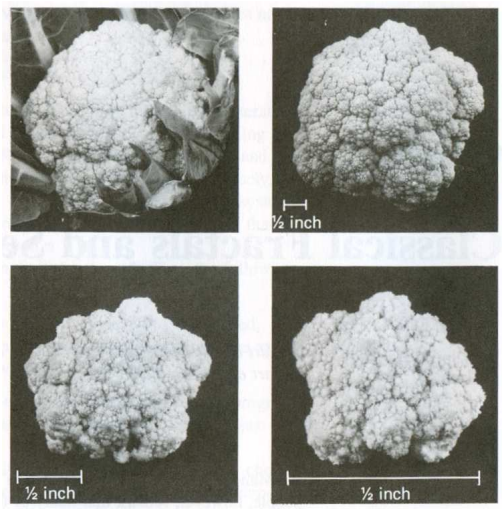


Figura 8: Aspecto auto-semelhante de uma couve-flôr.

O leitor poderá tentar observar este tipo de característica em diversas componentes de paisagens naturais, como ramos de árvores (no Inverno), relevo montanhoso, perfis de núvens, etc.

A geração computacional de objectos com propriedades (aproximadamente) fractais ou auto-semelhantes é utilizada, por exemplo, em processamento e síntese de imagens e de paisagens realistas (ver, por exemplo, [1], e a Figura 9).

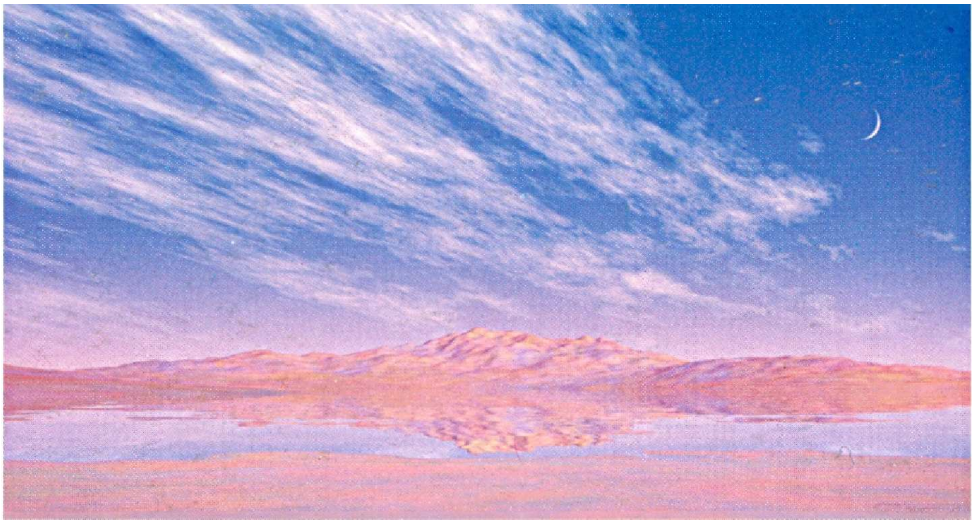


Figura 9: Paisagem artificial sintetizada por computador.

Referências

[1] Adam Brown: *Fractal Landscapes,* local da internet com o endereço `http://www.fractal-landscapes.co.uk/index.html` (consultado em 9 de Outubro de 2008)

[2] Pierre Eymard, Jean-Pierre Lafon; *The Number π,* American Mathematical Society, Providence, 2004

[3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe; *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science,* Springer-Verlag, New York, 1992

[4] Alistar Macintosh Wilson; *The Infinite in the Finite,* Oxford University Press, Oxford, 1995

"FOOD FOR THOUGHT" #3

FPC

17 de Outubro de 2008

Apesar da sua aparente simplicidade e da sua teoria relativamente simples, as sucessões reais constituem ingredientes importantes de modelos matemáticos com comportamentos notoriamente complexos.

Nesta breve nota pretendemos apresentar uma classe de exemplos nos quais as sucessões são utilizadas para a modelação da dinâmica de populações biológicas.

Convém desde já alertar o leitor para o facto de que, apesar do seu carácter aparentemente elementar, a exploração e elucidação matematicamente rigorosas de vários aspectos aqui aflorados sai muito claramente fora do nível em que se situam estas notas, sendo, em alguns casos, mesmo assunto de investigação científica contemporânea.

Modelos Discretos em Dinâmica de Populações: Modelos Lineares

Na modelação de muitos fenómenos físicos e naturais o tempo é assumido como uma variável real, usualmente positiva, $t \in \mathbb{R}^+$, mas existem casos, por exemplo em biologia, nos quais unidades discretas de tempo são as unidades naturais e onde, portanto, faz sentido considerar o tempo como uma variável $n \in \mathbb{N}$. Exemplos disto são os casos em que, numa determinada população biológica, as gerações não se sobrepõem temporalmente, tal como acontece em muitas espécies de insectos e de plantas sazonais, onde a unidade natural de tempo será "1 ano" e só faz sentido considerar incrementos discretos desta unidade.

Nesta nota consideraremos sempre o tempo como sendo uma variável discreta $n \in \mathbb{N}$.

Um *modelo discreto de dinâmica de populações* é uma lei que nos permite prever a evolução temporal do número de indivíduos de uma determinada espécie biológica (ou melhor: da sua densidade, considerando fixa a região

espacial ocupada pela espécie). Se designarmos por N_n o número (ou densidade) de indivíduos de uma determinada espécie biológica no instante $n \in \mathbb{N}$, estamos interessados em conhecer como é que uma população que, no instante $n = 1$, tem uma densidade N_1, evoluirá para instantes posteriores de tempo. Se pensarmos na variável n em termos de gerações, é natural considerar que o nível populacional no instante (ou geração) $n + 1$ dependerá directamente do que se passou no instante (ou geração) n e portanto

$$N_{n+1} = f(N_n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

onde f será uma função que deverá traduzir apropriadamente as condições biológicas em causa.

Repare que (1) define uma sucessão indutivamente, ou por recorrência, desde que imponhamos um valor de N_n no instante inicial $n = 1$: sendo dado o valor inicial N_1, então:

$$\begin{aligned} N_2 &= f(N_1) \\ N_3 &= f(N_2) \\ N_4 &= f(N_3) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

O caso mais simples possível para f é, sem grande surpresa, também o mais desinteressante: se f for uma função constante $f(x) = \alpha$, para alguma constante positiva α, então (1) reduz-se a $N_{n+1} = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, trata-se da sucessão que é constante a partir do seu segundo termo: a população não mais varia de ano para ano, o que dificilmente poderá constituir um modelo realista da realidade.

O modelo mais simples logo a seguir ao de $f =$ constante é o caso em que f é uma função linear, isto é, o gráfico de f é uma linha recta (que passa pela origem), ou seja, algebricamente, $f(x) = \alpha x$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}^+$. O modelo (1) é agora

$$N_{n+1} = \alpha N_n. \tag{3}$$

Este caso tem alguma relevância histórica pois está relacionado com as famosas previsões do economista inglês Thomas Malthus (1766–1834) sobre o crescimento populacional. Antes de explorar este modelo, uma palavra sobre o significado biológico de α: esta constante mede a taxa de variação da população entre dois anos consecutivos, $\alpha = \frac{N_{n+1}}{N_n}$, e portanto dependerá essencialmente das diferentes taxas que podem influenciar uma determinada população, por exemplo,

$$\alpha = \Bigg(\underbrace{\text{nascimentos} + \text{imigração}}_{\text{contribuição de aumento}}\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\underbrace{\text{mortes} + \text{emigração}}_{\text{contribuição de redução}}\Bigg).$$

Assim, é óbvio que se $\alpha > 1$ a população da geração seguinte será superior à população da geração anterior, $N_{n+1} = \alpha N_n > N_n$. Ter-se-á o contrário se $\alpha < 1$. Para esta lei particularmente simples, é possível obter uma expressão explícita para N_n e deduzir qual o comportamento da população quando $n \to +\infty$:

Exercício 1. Suponha que uma população N_n obedece à lei (3).

a) Prove que $N_n = N_1 \alpha^{n-1}$.

b) Determine quais os distintos comportamentos de N_n quando $n \to +\infty$, para os vários valores possíveis de $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

c) Interprete, do ponto de vista biológico, os resultados da alínea anterior.

Tal como se referiu num número anterior destas notas ("Foof for Thought" # 1, página 1) é usual ganhar-se imenso quando se encara um determinado problema sob pontos de vista diferentes. Isto é particularmente verdade no presente caso: a perspectiva geométrica que referiremos a seguir para o caso $f(x) = \alpha x$ é particularmente útil nos casos subsequentes onde tomaremos para f uma função (ligeiramente) mais complicada.

Retome-se o modelo malthusiano (3) e, para fixar ideias, consideremos o caso em que $\alpha < 1$ (não esquecendo que se tem sempre $\alpha > 0$). Observe-se que para determinar os valores de N_n basta-nos saber o valor de N_1. Sabendo este, calculamos $N_2 = \alpha N_1$, ou seja, N_2 é o valor da ordenada y de um ponto da recta $y = \alpha x$ com abcissa $x = N_1$ (cf. Figura 1)

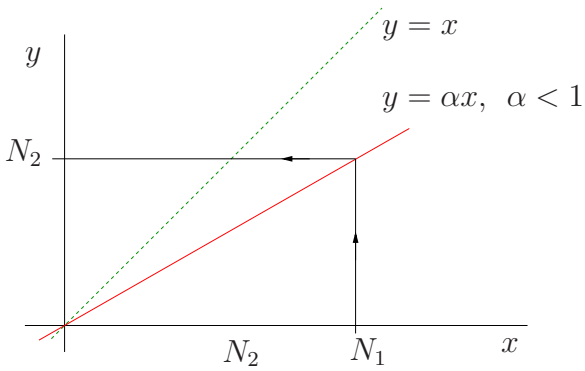


Figura 1: Primeira iteração: $N_2 = \alpha N_1$.

Na segunda iteração, N_2 é agora a abcissa da recta $y = \alpha x$, e calculamos a correspondente ordenada $N_3 = \alpha N_2$. Para passarmos N_2 do eixo dos y (onde

ele "nasceu" pela primeira iteração) para o eixo dos x (onde necessitamos que ele esteja para construirmos a segunda iteração) basta-nos reflecti-lo na recta $y = x$, como se indica na Figura 2.

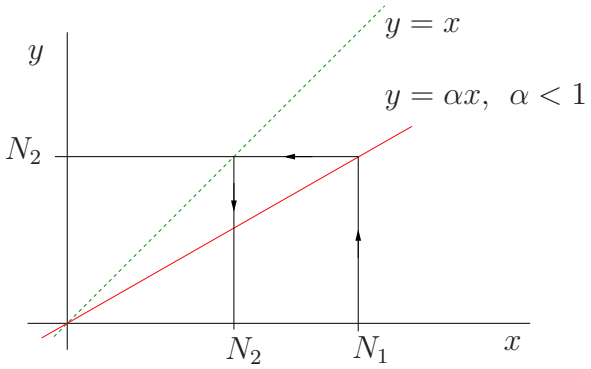


Figura 2: Colocação de N_2 no eixo adequado à segunda iteração.

Agora podemos iterar mais uma vez o processo (3) para obtermos N_3 (cf. Figura 3).

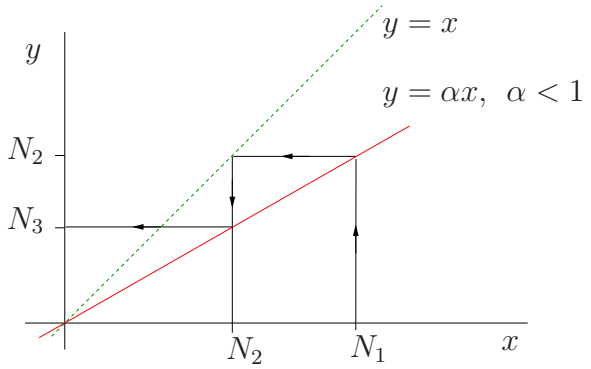


Figura 3: Segunda iteração: obtenção de $N_3 = \alpha N_2$.

E agora o processo repete-se indefinidamente, produzindo algo como o que se apresenta na Figura 4 que corresponde ao processo repetido até à quarta iteração.

Observe que o gráfico na Figura 4 sugere de modo absolutamente claro que, se $0 < \alpha < 1$, temos $N_n \to 0$ quando $n \to \infty$, como, aliás, já tinhamos concluído algebricamente pelo exercício 1.b).

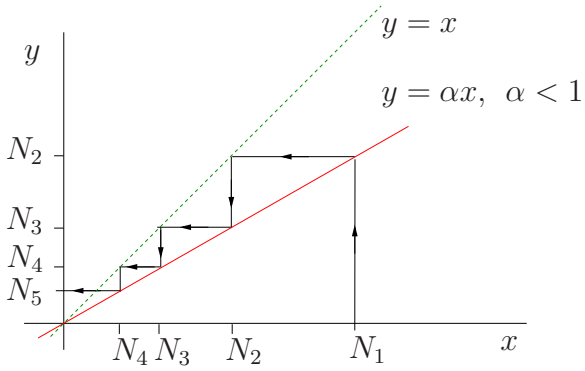


Figura 4: Iterações 1 a 4: obtenção de N_5 partindo de N_1.

Exercício 2.

a) Considerando $\alpha > 1$, esboce a representação geométrica análoga à da Figura 4 e compare o comportamento evidenciado geometricamente com o que determinou algebricamente no exercício 1.b).

b) Refaça a alínea 2.a) com $\alpha = 1$.

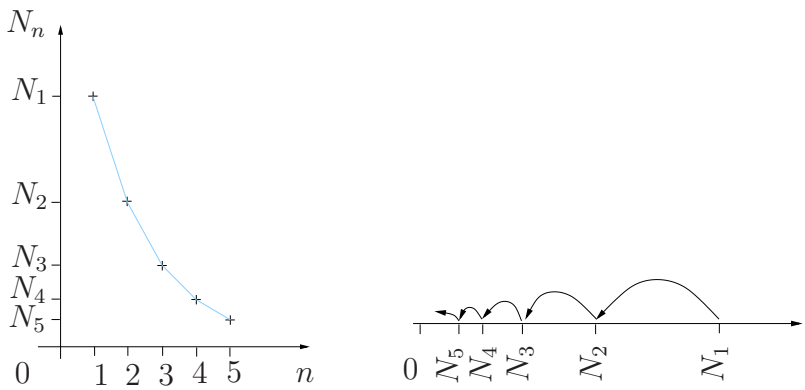


Figura 5: Duas representações gráficas dos primeiros 5 pontos da sucessão N_n.

Um outra representação gráfica da sucessão N_n, que também coloca em evidência, de modo claro, o seu comportamento, consiste em desenhar o gráfico da sucessão $n \mapsto N_n$ como fazemos com qualquer função real de variável real. Como o domínio da sucessão é $\mathbb{N}$, o gráfico consiste num conjunto de pontos isolados de $\mathbb{R}^2$ (representados por cruzes na Figura 5), os

quais, usualmente, unimos por segmentos de recta para aumentar a legibilidade (cf. segmentos de recta azuis na Figura 5). Uma representação ainda mais esquemática mas que é, muitas vezes suficiente, é a apresentada à direita da Figura 5, onde se apresenta, essencialmente, apenas o que está representado no eixo vertical da parte esquerda dessa figura e que, de facto, é suficiente para nos apercebermos do comportamento de N_n

Modelos Discretos em Dinâmica de Populações: Modelos Quadráticos

É claro que uma variação da população com uma taxa sempre constante não é realista para além de uma gama muito apertada de densidades. Com efeito, se a densidade da população atinge valores muito elevados, a taxa de mortalidade tende a aumentar muito apreciavelmente, devido, por exemplo, ao esgotamento de recursos alimentares, ou seja, α tende a diminuir quando N_n é muito grande. Isto significa que um modelo mais realista terá de ter em conta que, em (3), $\alpha = \alpha(N_n)$ e $\alpha(x)$ é uma função decrescente de x, pelo menos para valores grandes desta variável. Isto quer dizer que a função f em (3) será do tipo $f(x) = \alpha(x)x$ e, portanto, será uma função não-linear. O tipo de não linearidade dependerá, obviamente, dos detalhes da situação biológica, mas há vários tipos de funções $\alpha(x)$ que têm sido propostos e que são importantes sob os pontos de vista histórico, biológico, ou matemático. Um exemplo muito interessante e importante é o "modelo logístico", proposto em 1976 pelo biólogo Robert May [1] (e que está relacionado com um modelo semelhante, mas para tempo contínuo, proposto pelo matemático Pierre François Verhulst em 1845). O modelo, após um rescalamento apropriado (e que não é relevante detalhar nesta altura), pode ser escrito como

$$N_{n+1} = aN_n(1 - N_n), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

onde a é uma constante real positiva e a condição inicial N_1, devido ao rescalamento efectuado, deve ser escolhida no intervalo $[0, 1]$.

Observe-se que a função f que aqui está a ser considerada é o polinómio de segundo grau $f(x) = ax(1 - x)$ e, portanto, trata-se, essencialmente, da função polinomial mais simples logo a seguir à função linear $f(x) = \alpha x$ que considerámos na secção anterior.

No entanto, como veremos em breve, esta simplicidade de f esconde uma complexidade assombrosa no que diz respeito aos possíveis comportamentos das sucessões N_n. Não teremos aqui oportunidade de entrar em detalhes, se bem que uma boa parte do estudo básico do comportamento das sucessões definidas por (4) possa ser entendida com conhecimentos matemáticos a nível

elementar como o leitor poderá comprovar[1] consultando [1], [2, Capítulo 2] ou [3, pp.42-62].

Comecemos por considerar o comportamento de (4) numa situação particularmente simples: o caso em que $0 < a \leqslant 1$. Observando a Figura 6 conclui-se que é natural esperar que todas as sucessões N_n definidas pelo modelo logístico devam convergir para 0 quando $n \to \infty$.

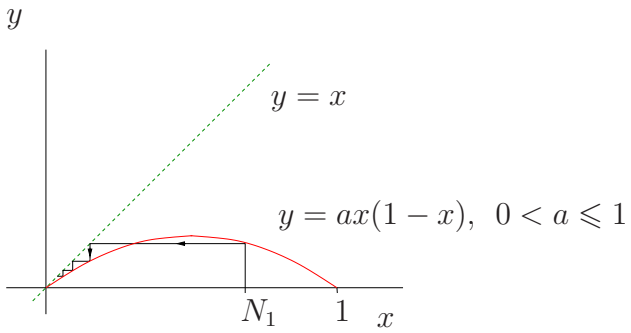


Figura 6: Comportamento típico das sucessões N_n do modelo logístico quando $0 < a \leqslant 1$

De facto, para este intervalo de valores do parâmetro a, é muito fácil *provar*[2] que, de facto, todas as sucessões dadas por (4) convergem para 0 e tal será deixado como exercício:

Exercício 3. Considere uma sucessão N_n dada pela lei logística (4) com $N_1 \in [0, 1]$ e $0 < a \leqslant 1$.

a) Mostre que todos os termos da sucessão estão também em $[0, 1]$.

b) Mostre que as sucessões N_n são sempre monótonas decrescentes.

c) Prove que as sucessões N_n são convergentes e determine o valor do limite.

Considerem-se agora os casos em que $a > 1$. Claro que agora o gráfico da parábola f passa a intersectar o gráfico da recta $y = x$ num único ponto. Designemo-lo por N^*. Este ponto é um *ponto fixo* de f. A razão de ser da designação é óbvia: se os gráficos de $y = x$ e $y = f(x)$ coincidem em $x = N^*$ então, neste ponto $f(x) = y = x$ e, portanto, o argumento x de f não sofre alteração após aplicarmos f: permanece fixo. É claro do que ficou dito que, se a condição inicial para (4) começa na abcissa do ponto fixo $N_1 = N^*$, então a sucessão N_n é a sucessão constante $N_n = N^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Figura 7).

[1]... e recomendo vivamente que o faça, para enriquecimento da sua cultura científica!

[2]Ou seja, demonstrar rigorosamente e não apenas intuir a partir da Figura 6...

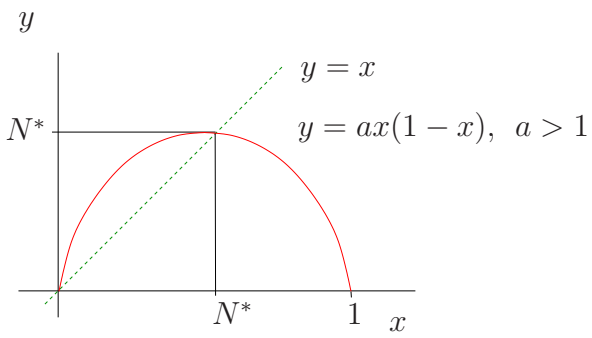


Figura 7: Ponto fixo do modelo logístico quando $a > 1$

O problema interessante coloca-se, obviamente, quando a condição inicial N_1 não coincide com a abcissa N^* do ponto fixo. O que é absolutamente espantoso e inesperado é que, nestes casos, o comportamento pode ser extraordinariamente complexo, dependente do valor específico do parâmetro $a > 1$. Para valores de a relativamente pequenos, as sucessões N_n têm como limite o ponto fixo N^* e convergem para lá de maneira ou monótona ou oscilatória, consoante o valor de a. Continuando a aumentar o valor de a, há uma altura a partir da qual as sucessões deixam de convergir para N^* (se bem que o ponto fixo continue a existir!) e passam a ter um comportamento oscilatório periódico, o qual se torna cada vez mais complexo à medida que a aumenta, até que, em determinado valor de a, o comportamento das sucessões N_n parece perder toda a regularidade, apresentando um comportamento aparentemente caótico.

Esta evolução no comportamento das sucessões N_n com o aumento de $a > 1$ está ilustrada na Figura 8, a qual foi produzida utilizando o applet Java interactivo disponibilizado online por Frank Wattenberg, da Montana State University, nos Estados Unidos.

Exercício 4. Explore o applet Java interactivo do modelo logístico (clique aqui), observando o efeito, na sucessão N_n, de alterar, quer a condição inicial (clique no eixo das abcissas para escolher o valor desta (ponto a preto)), quer o valor de a (clique na escala horizontal abaixo dos gráficos). Para obter sucessivos valores de N_n vá clicando sobre o gráfico de f (gráfico a vermelho). Guie a sua exploração do applet com a leitura de [2, Capítulo 2] a fim de perceber melhor o que está a contecer.

Note que este comportamento complexo que acabámos de observar ocorre

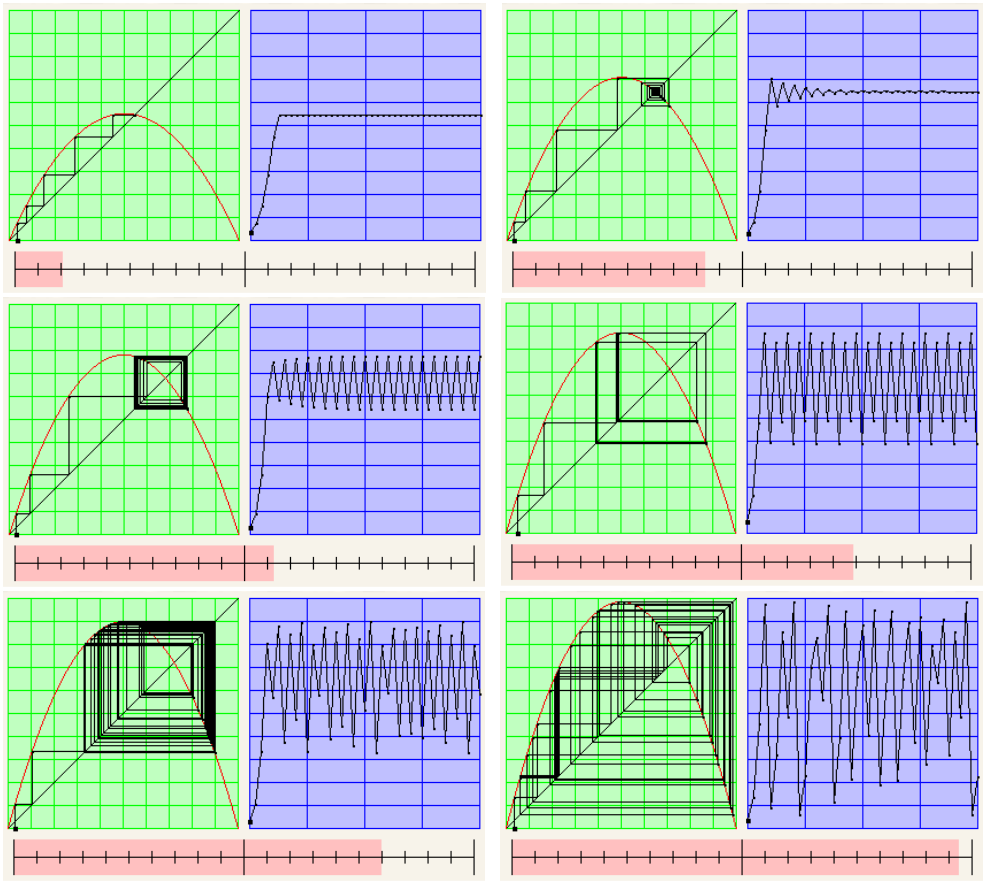


Figura 8: Comportamento das sucessões N_n resultantes do modelo logístico (4) com a mesma condição inicial N_1 mas para vários valores do parâmetro a. As simulações desta figura foram feitas recorrendo a uma aplicação interactiva a que o leitor pode aceder e explorar clicando aqui.

com um modelo que é ainda um modelo muito simples da realidade. É natural esperar que a consideração de modelos mais realistas (com várias espécies, com estrutura de idades dentro de cada espécie, com tempo contínuo, com dependência espacial, etc.) resulte numa ainda maior riqueza de comportamentos e numa ainda maior complexidade matemática. Isto é certamente o que acontece!

Referências

[1] R.M. May; Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature,* **261**, 459–467 (1976)

[2] James D. Murray; *Mathematical Biology I. An Introduction,* Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2008

[3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe; *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science,* Springer-Verlag, New York, 1992

"FOOD FOR THOUGHT" #4

FPC

29 de Outubro de 2008

Tal como se referiu nas duas notas anteriores, as sucessões constituem instrumentos fundamentais para a nossa compreensão da matemática e das ciências naturais. Nesta breve nota retomaremos este tema considerando agora uma aplicação elementar das séries numéricas à física.

As séries são, de facto, um caso particular (e particularmente importante) das sucessões, uma vez que estudar a convergência de uma série significa estudar a convergência da sucessão das suas somas parciais. Convém relembrar e reforçar o facto da sucessão das somas parciais de uma série $\sum_j a_j$ ser uma sucessão $S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ que não é, usualmente, explicitamente dada *a priori,* mas, ao invés, está relacionada, de um modo que é muitas vezes subtil, com a única informação conhecida sobre a série, a saber: o termo geral a_j.

Apesar disto, para determinados termos gerais a_j, a relação entre a sucessão das somas parciais e a sucessão do termo geral é fácil de obter. Tal é o caso das séries geométricas, i.e., séries com termo geral $a_j = r^j$ (com $|r| < 1$), para as quais a sucessão das somas parciais é

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

e portanto a soma da série geométrica é

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - r}. \tag{1}$$

Nas secções seguintes estudaremos dois exemplos simples de aplicação das séries geométricas à física.

Aplicação Elementar das Séries Geométricas à Física: Relatividade vs. Mecânica Newtoniana

Em mecânica newtoniana, dois corpos que se deslocam um contra o outro com velocidades $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm uma velocidade relativa

$$V_{\text{new}} = v + w, \tag{2}$$

onde $v = \|\vec{v}\|$ é a norma de $\vec{v}$ e $w = \|\vec{w}\|$ a de $\vec{w}$. Isto é, claro está, um fenómeno conhecido de todos: o choque frontal entre dois móveis que circulam a 600 Km/h um contra o outro é equivalente a estar um deles parado e o outro colidir contra ele a 1200 Km/h (Figura 1). Isto é resultado da lei adição de velocidades da mecânica newtoniana.

Figura 1: Representação esquemática de dois corpos macroscópicos em trajectória de colisão. A velocidade relativa, em mecânica newtoniana, é $V_{\text{new}} = v + w$.

No entanto, desde o trabalho de Einstein de 1905 sobre a teoria da relatividade restrita (cuja tradução portuguesa pode ser consultada em [1]) que se sabe que a velocidade limite no universo é a velocidade da luz no vácuo, cujo valor é $c = 299792458$ m/s. Isto tem como resultado que a lei de adição de velocidades da física newtoniana só pode ser válida, como razoável aproximação, quando as somas dos valores absolutos das velocidades, v e w, são muito inferiores a c.

De facto, na situação de colisão frontal entre dois móveis com valores absolutos de velocidades v e w, a teoria de Einstein [2] estabelece (e medições experimentais muito precisas confirmam) que a velocidade relativa é, não $v + w$, mas

$$V_{\text{rel}} = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \tag{3}$$

É claro que as velocidades atingidas por corpos macroscópicos são sempre muito inferiores a c (ou seja, $v, w \lll c$) mas, no caso de partículas atómicas ou subatómicas (Figura 2), é possível acelerá-las até velocidades muito próximas de c e, nestes casos, a consideração dos efeitos relativistas é

de importância fundamental (cf. o recentemente inaugurado LHC no CERN, Genebra.)

Figura 2: Representação esquemática de dois átomos de oxigénio $^{16}O_8$ em trajectória de colisão. A velocidade relativa, em relatividade restrita, é $V_{\text{rel}} = \frac{v+w}{1+vw/c^2}$.

Quando v e w são ambos muito inferiores à velocidade da luz c espera-se, por argumentos físicos, que a velocidade relativa relativista seja praticamente igual à velocidade relativa newtoniana ou seja, matematicamente esperamos que (3) seja (muito bem) aproximada por (2). Para verificarmos e quantificarmos rigorosamente esta expectativa, comecemos por observar que V_{rel} pode ser escrita como

$$V_{\text{rel}} = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} = (v+w)\frac{1}{1-\left(-\frac{vw}{c^2}\right)}. \tag{4}$$

e agora note-se que a fracção presente no membro direito de (4) é do tipo $\frac{1}{1-r}$ (para que r?), ou seja, pode ser considerada como a soma de uma série geométrica apropriada. Esta ideia permite relacionar V_{rel} com V_{new}, como se explora de seguida:

Exercício 1. Considere V_{rel} e V_{new} dados por (3) e (2), respectivamente.

a) Escreva V_{rel} como a soma duma série de potências de $\left(-\frac{vw}{c^2}\right)$.

b) Use o resultado da alínea anterior para estimar um majorante para o valor absoluto do erro que se comete quando se toma o valor newtoniano V_{new} em vez do valor relativista V_{rel}.

c) Considerando que as duas partículas se movem uma contra a outra com $v = w$, estime a maior velocidade v para a qual o erro relativo que se comete ao ser tomada a expressão newtoniana em vez da relativista é *inferior* a 1%.

Aplicação Elementar das Séries Geométricas à Física: A Lei Gravitacional de Newton

As séries são úteis não apenas para relacionarmos teorias diferentes, como explorámos na secção anterior, mas também para considerarmos determina-

dos casos limite particularmente interessantes dentro de uma mesma teoria física.

Para ilustrar este último ponto de um modo simples, consideraremos nesta secção o modo como, em física newtoniana, é medida a energia potêncial gravítica.

Como é do conhecimento geral, em física elementar um corpo de massa m que esteja a uma altura h acima da superfície da Terra tem uma energia potencial gravítica dada por

$$E_p = mgh, \tag{5}$$

onde $g = 9,8\text{m/s}^2$ é (o módulo d)a aceleração da gravidade à superfície da Terra. Assume-se, ao escrever (5), que a energia potencial E_p é nula à superfície da Terra. É também assumido ao escrevermos (5) que a altura h do corpo acima da superfície é pequena (Figura 3)

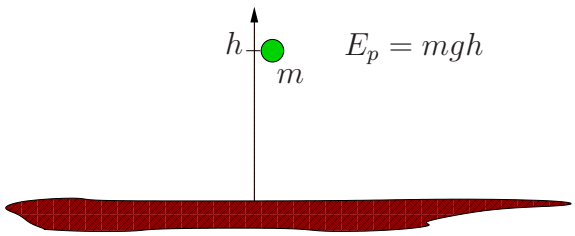


Figura 3: Potêncial gravítico de um corpo de massa m a uma pequena altura h acima da superfície da Terra.

De acordo com a teoria da gravitação de Newton, a energia potêncial de um corpo de massa m a uma distância d do centro da Terra é dada por

$$U = -G\frac{Mm}{d}, \tag{6}$$

onde M é a massa da Terra e $G = 6,67428 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{Kg/s}^2$ é a constante gravitacional e onde se assume que a energia potêncial U é nula no infinito (Figura 4).

É claro que a distância do corpo ao centro da Terra, d, e a altura do corpo em relação à superfície da Terra, h, relacionam-se entre si pela equação $R + h = d$, onde R é o raio da Terra (suposta esférica). Assim, podemos escrever (6) como

$$U = -G\frac{Mm}{R+h}, \tag{7}$$

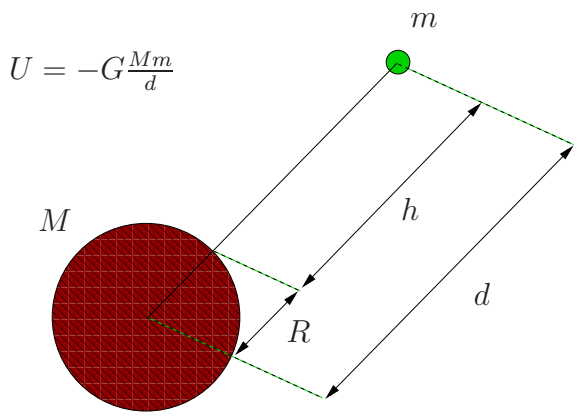


Figura 4: Potêncial gravítico newtoniano de um corpo de massa m a uma distância d do centro da Terra.

e tentar relacionar esta expressão, quando $h \lll R$, com a fórmula (5) que é válida para valores de h pequenos.

Tal como no caso analisado na secção anterior, espera-se que (6) seja, nalgum sentido, bem aproximada por (5) quando h é muito pequeno. Tendo em atenção (7) pode-se escrever

$$U = -G\frac{Mm}{R+h} = -\frac{GMm}{R}\frac{1}{1-\left(-\frac{h}{R}\right)}, \tag{8}$$

e agora note-se que, tal como aconteceu na secção anterior em (4), a segunda fracção presente no membro direito de (8) é do tipo $\frac{1}{1-r}$ (para que r?), ou seja, pode ser considerada como a soma de uma série geométrica apropriada. Novamente, é esta ideia que permite relacionar U com E_p, tendo presente que há que reescalar a energia potêncial U de modo a que se torne nula à superfície da Terra (ou seja: há que considerar $U + \frac{GMm}{R}$ em vez de U) e portanto comparável com E_p. Para esta comparação é também necessário ter presente que as constantes físicas g e G se relacionam entre si pela expressão $g = \frac{GM}{R^2}$. O processo, agora, é em tudo semelhante ao explorado no Exercício 1, na secção anterior:

Exercício 2. Considere U e E_p dados por (6) e (5), respectivamente.

a) Escreva U como a soma duma série de potências de $\left(-\frac{h}{R}\right)$ e use essa série para relacionar U com E_p.

b) Use o resultado da alínea anterior para estimar um majorante para o valor absoluto do erro que se comete quando se toma o valor aproximado E_p em vez do valor newtoniano U.

c) Estime para que valor da altura em relação à superfície da Terra é que o erro relativo que se comete ao tomar E_p em vez da expressão newtoniana é *superior* a 1%.

Referências

[1] Albert Einstein; Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento, em: H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski: *O Princípio da Relatividade,* Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1978, pp. 47-86.

[2] João Resina Rodrigues; *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita,* Colecção Ensino da Ciência e da Tecnologia, Vol. 3, IST Press, Lisboa, 1998.