INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano Lectivo: 2010/2011

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 12 de Julho de 2011

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere os números reais

$$a = \pi, \qquad b = \frac{2199}{700}, \qquad c = \frac{a-b}{a+b}.$$

(a)^{10} Supondo o cálculo efectuado num sistema de ponto flutuante com seis algarismos de mantissa e arredondamento simétrico determine o valor aproximado $\tilde{c}$ de c e o seu erro relativo em relação ao valor exacto $c = 0.261151690\ldots \times 10^{-4}$.

(b)^{10} Supondo que são apenas conhecidos valores aproximados $\tilde{a}, \tilde{b}$ de a, b, e que as três operações aritméticas envolvidas no cálculo de c, adição, subtracção e divisão, têm erros de arredondamento $\delta_A, \delta_S, \delta_D$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{c}$ de c.

[2] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := x - 3 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x,$$

a qual tem um único zero real $z \in [2.6, 2.8] =: I$.

(a)^{15} Mostre que o método de Newton converge para o zero z para qualquer iterada inicial x_0 no intervalo I.

(b)^{15} Utilize o método da Newton com iterada inicial $x_0 = 2.6$ para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.001.

[3]^{20} Suponha que utiliza o método iterativo

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{\omega}{2}(b - Ax^{(n)}), \qquad n \geq 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

para resolver o sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e $b \in \mathbb{R}^2$ é um vector arbitrário. Determine o intervalo de valores do parâmetro ω para os quais está garantida a convergência do método para qualquer iterada inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

[4] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x),$$

v.s.f.f.

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{2}\cos(x_1+x_2) - 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}\sin(x_1+x_2) - 2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\cos(x_1+x_2) \\ 2 + \frac{1}{3}\sin(x_1+x_2) \end{bmatrix}.$$

(a)^{15} Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right].$$

(b)^{15} Obtenha um valor aproximado $x^{(1)}$ para a solução z usando uma iterada do método de Newton generalizado partindo da iterada inicial $x^{(0)} = [1 \ \ \pi - 1]^T$.

[**5**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	-1.908	-0.841	1.000	2.841	3.908

(a)^{20} Determine o polinómio que interpola f nos pontos da tabela usando a fórmula de Newton.

(b)^{20} Determine o polinómio da forma

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_3 x^3$$

que constitui a melhor aproximação mínimos quadrados de f nos pontos da tabela.

[**6**] Pretende obter-se uma fórmula de quadratura com dois nós de integração

$$Q(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1),$$

para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-2}^{2} |x| f(x)\, dx,$$

para qualquer $f \in C([-2,2])$.

(a)^{20} Determine w_0, w_1, x_0, x_1 de modo a que a fórmula de quadratura seja exacta para polinómios de grau menor ou igual a 3.

(b)^{10} Diga justificadamente qual o grau de precisão da fórmula assim obtida.

[**7**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \phi''(t) + \sin\phi(t) = 0, & t \geq 0, \\ \phi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $\Phi(h)$ e $\Phi'(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração:

(a)^{15} pelo método de Euler modificado;

(b)^{15} pelo método de Taylor de ordem 2.

Nota. Os resultados vêm expressos em termos de h.

12.JUL.2011