INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame e Testes de 21 de Janeiro de 2011

	Exercícios								Duração
1º Teste	$[1]^{50}$	$[2]^{60}$	$[3]^{70}$	$[4]^{20}$					90 minutos
2º Teste					$[5]^{40}$	$[6]^{60}$	$[7]^{40}$	$[8]^{60}$	90 minutos
Exame	$[1]^{25}$	$[2]^{30}$	$[3]^{35}$	$[4]^{10}$	$[5]^{20}$	$[6]^{30}$	$[7]^{20}$	$[8]^{30}$	180 minutos

Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x - \sin x$, num ponto x do seu domínio:

$$u = \sin x, \qquad z = f(x) = x - u.$$

(a)^{10} Supondo o cálculo efectuado num sistema de ponto flutuante com quatro algarismos de mantissa e arredondamento por corte determine o valor aproximado de $f(x_0)$ para $x_0 = 0.01234$ e o erro relativo deste valor aproximado em relação ao valor exacto $f(x_0) = 0.313177\ldots \times 10^{-6}$.

(b)^{15} Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as duas operações envolvidas no cálculo de $z = f(x)$, $x \mapsto \sin x$ e $(x, u) \mapsto x - u$, supostas elementares, têm erros de arredondamento δ_1 e δ_2, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize este resultado para analisar a estabilidade do problema e a estabilidade numérica do algoritmo.

[**2**] Considere a equação

$$f(x) := 2\ln x + \frac{1}{x} + 1 - x = 0.$$

(a)^{10} Mostre que a equação tem um único zero real z.

(b)^{20} Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x + f(x)$, converge para z, para qualquer iterada inicial $x_0 \in [3.9, 4.1]$, e utilize este método com iterada inicial $x_0 = 4.0$ para obter um valor aproximado da raiz z com um erro inferior a 10^{-2}.

continua

[3] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a)[15] Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer iterada inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(b)[20] Determine quantas iteradas m do método de Jacobi com aproximação inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ seria necessário efectuar para obter um valor aproximado $x^{(m)}$ da solução do sistema $Ax = b$ com um erro absoluto inferior a 10^{-6} (expresso na norma do máximo).

[4][10] Mostre que a norma matricial associada à norma da soma em $\mathbb{R}^n$ tem a forma

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \,,$$

para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ com elementos a_{ij}.

——— * * * ———

[5][20] Considere o sistema de equações não-lineares

$$f(x) = 0,$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} -6x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 - 5x_2 + x_3^3 \\ x_1^2 - 3x_2 + 6x_3 - 1 \end{bmatrix},$$

o qual tem duas e só duas soluções em $\mathbb{R}^3$. Calcule um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução do sistema mais próxima da origem usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

[6] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x + \sin(2x + 2).$$

(a)[20] Tomando

$$f(-1.0) = -1.0, \qquad f(0.0) = 0.9093, \qquad f(1.0) = 0.2433, \qquad f(2.0) = 1.721,$$

determine o polinómio p_3 que interpola f nos quatro nós igualmente espaçados do intervalo $[-1.0, 2.0]$, $-1.0, 0.0, 1.0, 2.0$, e obtenha um majorante do erro de interpolação definido por

$$\max_{x \in [-1,2]} |f(x) - p_3(x)|.$$

continua

(b)[10] Determine os quatro pontos do intervalo $[-1.0, 2.0]$ que deveria escolher para nós de interpolação por forma a que o majorante do erro de interpolação do polinómio interpolador q_3 de f nesses quatro nós, definido por

$$\max_{x\in[-1,2]} |f(x) - q_3(x)|,$$

fosse o menor possível.

[7][20] Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^2 e^{\sin x}\, dx,$$

usando a fórmula dos trapézios composta com 4 sub-intervalos de igual comprimento e obtenha uma majorante do erro deste valor aproximado.

[8] **(a)**[15] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x[1 - y(x) \times y(x)] - y(x), & x \geq 1, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

com solução exacta Y. Obtenha um valor aproximado y_1 para $Y(1+h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando um passo do método de Runge-Kutta clássico de ordem 2.

(b)[15] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = x[1 - y(x) \times y(x)]y'(x) - y(x), & x \geq 1, \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 2, \end{cases}$$

com solução exacta Y. Obtenha valores aproximados y_1 e z_1 para $Y(1+h)$ e $Y'(1+h)$, respectivamente, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando um passo do método de Taylor de ordem 2.