MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [3a.1], [3a.2], [3a.3]

[**3a**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução z usando o **método de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos zeros das seguintes funções:

[**3a.1**] (1) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(2) uma função f à sua escolha

[**3a.2**] (1) $f(x) = e^{x^2-1} + 10\sin(2x) - 5$

(2) uma função f à sua escolha

[**3a.3**] (1) $f(x) = 0.1x^2 + e^{-x} - \sin(3x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [3b.1], [3b.2], [3b.3]

[**3b**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução z usando o **método da secante**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos zeros das seguintes funções:

[**3b.1**] (1) $f(x) = (1-x)^3 - \sin(1-x)$

(2) uma função f à sua escolha

[**3b.2**] (1) $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(2) uma função f à sua escolha

[**3b.3**] (1) $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 0.5$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [3c.1], [3c.2], [3c.3]

[3c] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução z usando o **método do ponto fixo**,

$$x_{m+1} = x_m + \omega f(x_m), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \text{ dado},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é um parâmetro a determinar (para cada função e cada zero).

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos zeros das seguintes funções:

[3c.1] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) uma função f à sua escolha

[3c.2] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) uma função f à sua escolha

[3c.3] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan(x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [3d.1], [3d.2], [3d.3]

[3d] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução z usando o **método de Stephensen**,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{[f(x_m)]^2}{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \text{ dado.}$$

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos zeros das seguintes funções:

[3d.1] (1) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(2) uma função f à sua escolha

[3d.2] (1) $f(x) = e^{x^2-1} + 10\sin(2x) - 5$

(2) uma função f à sua escolha

[3d.3] (1) $f(x) = 0.1x^2 + e^{-x} - \sin(3x)$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [3e.1], [3e.2], [3e.3]

[**3e**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução z usando o **método de Newton modificado**,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{h f(x_m)}{f(x_m + h) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \text{ dado},$$

onde $h > 0$ e suficientemente pequeno é um parâmetro a escolher.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos zeros das seguintes funções:

[**3e.1**] (1) $f(x) = (1 - x)^3 - \sin(1 - x)$

(2) uma função f à sua escolha

[**3e.2**] (1) $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(2) uma função f à sua escolha

[**3e.3**] (1) $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 0.5$

(2) uma função f à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em funções com zeros conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [4a.1], [4a.2], [4a.3], [4a.4]

[**4a**] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Jacobi modificado** ou **método JOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

$$[\mathbf{4a.1}] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

$$[\mathbf{4a.2}] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[4a.3] (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) um sistema à sua escolha

[4a.4] (1) $A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(2) um sistema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência; variação do parâmetro de relaxação; variação da dimensão do sistema. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [4b.1], [4b.2], [4b.3], [4b.4]

[4b] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Gauss-Seidel modificado** ou **método SOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

[4b.1] (1) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

[4b.2] (1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[4b.3] (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) um sistema à sua escolha

[4b.4] (1) $A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(2) um sistema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência; variação do parâmetro de relaxação; variação da dimensão do sistema. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [5a.1], [5a.2], [5a.3], [5a.4], [5a.5], [5a.6], [5a.7]

[**5a**] Considere um sistema de equações $f(x) = 0$ onde $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, é uma função contínuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z do sistema e tal que a sua matriz Jacobiana é invertível em z. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton generalizado**. Use o **método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot** para resolver o sistema linear que determina a diferença de duas iteradas sucessivas do método de Newton.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas não-lineares:

[**5a.1**] (1) $$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

(2) uma sistema à sua escolha

[**5a.2**] (1) $$\begin{cases} x_1^3 - 6x_1 x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2 x_2 - 4x_2^3 - 2 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

[**5a.3**] (1) $$\begin{cases} 2x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - 1 = 0 \\ 6x_1^2 x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

[**5a.4**] (1) $$\begin{cases} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) - \log(2\pi) + 1 = 0 \\ 4x_1^2 - 4x_1 + 8x_2^2 - 15 = 0 \end{cases}$$

(2) um sistema à sua escolha

continua

[5a.5] (1) $\begin{cases} x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$

(2) um sistema à sua escolha

[5a.6] (1) $\begin{cases} x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0 \\ x_2^2 - 2x_1x_3 - 4 = 0 \\ e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0 \end{cases}$

(2) um sistema à sua escolha

[5a.7] (1) $\begin{cases} x_1x_2 - x_3^2 + 3 = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$

(2) um sistema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro dos valores aproximados obtidos; convergência e ordem de convergência. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em sistemas com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [6a.1], [6a.2]

[6a] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a,b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Lagrange**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6a.1] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}$, $\quad x_k = 5\left(-1+\dfrac{2k}{N}\right)$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}$, $\quad x_k = -5\cos\left(\dfrac{2k+1}{2N+2}\,\pi\right)$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha

[6a.2] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}$, $\quad x_k = 3\left(-1+\dfrac{2k}{N}\right)$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}$, $\quad x_k = -3\cos\left(\dfrac{2k+1}{2N+2}\,\pi\right)$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [6b.1], [6b.2]

[6b] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6a.1] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}, \qquad x_k = 5\left(-1+\dfrac{2k}{N}\right), \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}, \qquad x_k = -5\cos\left(\dfrac{2k+1}{2N+2}\,\pi\right), \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha

[6a.2] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}, \qquad x_k = 3\left(-1+\dfrac{2k}{N}\right), \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^{N}, \qquad x_k = -3\cos\left(\dfrac{2k+1}{2N+2}\,\pi\right), \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011   Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [7a.1], [7a.2]

[7a] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o polinómio de grau menor ou igual a n, sendo $n \leq N$, que constitui a **melhor aproximação mínimos quadrados discreta** de f nos pontos dados. Utilize o **método de eliminação de Gauss** para resolver o sistema normal.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[7a.1] (1) { (0.00, 0.872740), (0.05, 1.16988), (0.10, 0.913756), (0.15, 0.876550), (0.20, 0.938130), (0.25, 1.06479), (0.30, 1.18807), (0.35, 1.07725), (0.40, 1.20431), (0.45, 1.33526), (0.50, 1.19192), (0.55, 1.32128), (0.60, 1.36179), (0.65, 1.48189), (0.70, 1.66238), (0.75, 1.44720), (0.80, 1.46947), (0.85, 1.65419), (0.90, 1.69708), (0.95, 1.88074), (1.00, 2.16617) }

(2) um conjunto de pontos à sua escolha

[7a.2] (1) { (0.00, 0.486), (0.05, 0.866), (0.10, 0.944), (0.15, 1.144), (0.20, 1.103), (0.25, 1.202), (0.30, 1.166), (0.35, 1.191), (0.40, 1.124), (0.45, 1.095), (0.50, 1.122), (0.55, 1.102), (0.60, 1.099), (0.65, 1.017), (0.70, 1.111), (0.75, 1.117), (0.80, 1.152), (0.85, 1.265), (0.90, 1.380), (0.95, 1.575), (1.00, 1.857) }

(2) um conjunto de pontos à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro quadrático médio; variação dos resultados com o grau do polinómio aproximador.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [8a.1], [8a.2]

[8a] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

(I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 2 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número par;

(II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8a.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8a.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos; comparação dos dois métodos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [8b.1], [8b.2]

[8b] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

(I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 3 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 3;

(II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8b.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4\cos(2x)}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

[8b.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6\sin(2x)}{(x^2+4x+13)^3}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos; comparação dos dois métodos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [8c.1], [8c.2]

[8c] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

(I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 4;

(II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8c.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8c.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos; comparação dos dois métodos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [8d.1], [8d.2]

[8d] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

(I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 5 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 5;

(II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8d.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

[8d.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2 + 4x + 13)^3}\, dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos; comparação dos dois métodos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [8e.1], [8e.2]

[8e] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

(I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 6 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 6;

(II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8e.1] (1) $\displaystyle\int_6^{10} \frac{x^4 \cos(2x)}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

[8e.2] (1) $\displaystyle\int_5^{9} \frac{x^6 \sin(2x)}{(x^2+4x+13)^3}\,dx$

(2) um integral à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos; comparação dos dois métodos. Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em integrais com valores conhecidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011   Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10a.1], [10a.2]

[10a] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10a.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10a.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), & \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. & \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10b.1], [10b.2]

[10b] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Heun de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10b.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10b.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10c.1], [10c.2]

[10c] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Nystrom de 3ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10c.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10c.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10d.1], [10d.2], [10d.3]

[10d] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10d.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10d.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10d.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10e.1], [10e.2], [10e.3]

[10e] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Gill de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10e.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10e.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10e.3] (1) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, \qquad x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios [10f.1], [10f.2], [10f.3]

[10f] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Merson de 4ª ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10f.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & \\ y_2'(x) = -2\alpha y_2(x) - \sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], \quad y_2(0) \in \mathbb{R}, & \alpha = 0.0, 0.1 \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

[10f.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), & \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \quad y_2(0) > 0. & \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha

continua

[10f.3] (1) $$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x - 1}{y(x) + x - 1}, \qquad x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = \varepsilon\,(1 - [y_1(x)]^2)\, y_2(x) - y_1(x), \qquad x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, \qquad y_2(0) > 0, \qquad \varepsilon = 0.1, 1.0, 10.0 \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração; variação das condições iniciais e dos parâmetros (caso (2)). Note-se que o cálculo do erro obriga a que o programa seja testado em problemas de valor inicial com soluções conhecidas.