INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 30 de Outubro de 2010

Duração: 1 hora e 30 minutos. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{40} Considere o seguinte algoritmo para o cálculo da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, num ponto x do seu domínio:

$$z_1 = x + 1, \qquad z_2 = \sqrt{z_1}, \qquad z_3 = \sqrt{x}, \qquad z = f(x) = z_2 - z_3.$$

Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as quatro operações envolvidas no cálculo de z, adição, raiz quadrada (duas vezes) e subtracção, supostas elementares, têm erros de arredondamento $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize o resultado para analisar a estabilidade do problema e a estabilidade numérica do algoritmo.

[2] Considere a equação

$$f(x) := e^x - 3x^2 = 0,$$

que tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-0.6, -0.4], \qquad z_2 \in [0.8, 1.0], \qquad z_3 \in [3.6, 3.8].$$

(a)^{35} Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{3}}.$$

e qualquer iterada inicial $x_0 \in [0.8, 1.0]$, converge para a raiz z_2 e utilize este método para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-3}.

(b)^{35} Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [3.6, 3.8]$ converge para a raiz z_3 e utilize este método para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-3}.

(c)^{20} Determine a ordem de convergência da sucessão $\{B_m\}$, $B_m = \delta^{q_m}$, onde $0 < \delta < 1$ é uma constante e $\{q_m\}$ é a sucessão definida por

$$q_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r_0^{m+1} - r_1^{m+1} \right),$$

com $r_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

v.s.f.f.

[**3**] Considere o sistema linear $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 6+\varepsilon & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix},$$

e ε é um parâmetro real, $|\varepsilon| \leq 1$.

(a)[35] Sabendo que o sistema $A_0 x_0 = b_0$ (isto é, o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$ com $\varepsilon = 0$) tem a solução $x_0 = [1 \;\; 1]^T$, determine, sem resolver o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, um majorante de $\|x_\varepsilon - x_0\|_1$.

(b)[35] Determine um valor aproximado $x^{(2)}$ da solução x_1 do sistema $A_1 x_1 = b_1$ usando duas iteradas do método de Gauss-Seidel com aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0]^T$ e obtenha um majorante do erro absoluto $\|x_1 - x^{(2)}\|_\infty$.