INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2010/2011 Semestre: 1º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 15 de Dezembro de 2010

Duração: 1 hora e 30 minutos. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares $x = g(x)$ onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cos x_1 + \frac{1}{4}\sin x_2 \\ \frac{1}{4}\sin x_1 + \frac{1}{5}\cos x_2 \end{bmatrix}.$$

(a)^{20} Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

(b)^{30} Calcule um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = [0\ 0]^T$ e obtenha uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

[**2**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^4(\mathbb{R})$:

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.25	2.5	3.75	5.0
$f(x_i)$	-1.0	0.298	0.856	0.614	0.323

(a)^{25} Determine o polinómio p_3 que interpola f nos pontos x_0, x_1, x_2, x_3. Use a fórmula de Newton com diferenças divididas.

(b)^{30} Determine os valores das constantes a e b que minimizam a soma

$$S(a,b) = \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - a - bx_i^2]^2.$$

(c)^{25} Calcule o valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^5 f(x)\,dx,$$

usando a regra de Simpson composta com 4 subintervalos.

v.s.f.f.

(d)^{20} Supondo que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 17, \ \forall x \in [0,5]$, determine o número mínimo de subintervalos que seria necessário utilizar para que o erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre composta de ordem 1 (isto é, com 2 nós de integração por subintervalo) para aproximar o integral $I(f)$ da alínea anterior fosse inferior a 10^{-6}.

[3] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 4e^{-y(x)}, & x \geq 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

com solução exacta $Y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $Y(x) \geq 0, \ \forall x \geq 0$.

(a)^{30} Obtenha um valor aproximado y_1 para $Y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de ordem 2.

(b)^{20} Obtenha um majorante para o erro $|Y(h) - y_1|$.

Nota. Os resultados devem vir expressos em termos de h.

15.DEZ.2010