MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Junho de 2008

1. REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS E TEORIA DE ERROS[1]

[1.1] Represente x num sistema de ponto flutuante com 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico, nos seguintes casos:

(a) $x = 1/6$; **(b)** $x = 1/3$; **(c)** $x = -83784$;

(d) $x = -83785$; **(e)** $x = 83798$: **(f)** $x = 0.0013296$.

[1.2] Tomaram-se para valores aproximados de

$$x = 0.3000 \times 10^{-3}, \qquad y = 0.3000 \times 10^{1}, \qquad z = 0.3000 \times 10^{4},$$

respectivamente os valores

$$\tilde{x} = 0.3100 \times 10^{-3}, \qquad \tilde{y} = 0.3100 \times 10^{1}, \qquad \tilde{z} = 0.3100 \times 10^{4}.$$

Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

[1.3] Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

(a) Obtenha aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, num sistema de ponto flutuante com 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{z} = \mathrm{fl}(\tilde{x} - \tilde{y})$.

(b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

(c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada repita as alíneas(a) e (b) usando um sistema de ponto flutuante com 6 dígitos na mantissa.

[1.4] Considere os valores

$$x = 0.100456683, \qquad y = 0.0995214437.$$

Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir a

$$x \times y, \qquad x \div y, \qquad x + y, \qquad x - y,$$

ao efectuar as operações num sistema de ponto flutuante FP(10, 7, -38, 38) com arredondamento simétrico.

[1.5]* Considere os números $x = \pi$ e $y = 333/106$.

(a) Obtenha aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ para x e y, respectivamente, num sistema de ponto flutuante FP(10, 6, -10, 10) com arredondamento simétrico.

[1] O asterisco * a seguir ao número do exercício indica "exercício recomendado".

(b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$.

(c) Calcule, efectuando as operações num sistema FP(10, 6, -10, 10) com arredondamento simétrico, valores aproximados das quantidades

$$x \times y, \qquad x \div y, \qquad x + y, \qquad x - y.$$

(d) Calcule os erros absolutos e relativos as quantidades calculadas na alínea anterior.

(e) Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir a cada um das quantidades calculadas na alínea (c).

(f) Repita as alíneas (a) e (b) e a parte respeitante à quantidade $x - y$ das alíneas (c)-(d)-(e) considerando um sistema FP(10, 9, -10, 10) com arredondamento simétrico.

[**1.6**] Determine o erro absoluto cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de ponto flutuante com 6 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico.

[**1.7**] Considere os valores

$$A = 0.492, \quad B = 0.603, \quad C = -0.494, \quad D = -0.602, \quad E = 10^{-5}$$

Com a finalidade de calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E},$$

dois indivíduos, usando uma máquina com 3 dígitos na mantissa e com arredondamento simétrico, efectuaram esse cálculo de forma distinta, mas aritmeticamente equivalente.

O indivíduo X calculou $A + B$, depois $C + D$, somou os valores, e dividiu por E, obtendo $F = 0$.

Por seu turno, indivíduo Y calculou $A+C$, depois $B+D$, somou os valores, e dividiu por E, obtendo $F = -100$.

Verifique os cálculos efectuados pelos dois indivíduos e comente a disparidade de resultados obtidos, atendendo a que se usaram processos matematicamente equivalentes.

[**1.8**] Sendo x e y números positivos considerados num sistema de ponto flutuante decimal tais que $x > y$ e

$$10^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 10^{-p},$$

mostre que pelo menos p e no máximo q dígitos significativos são perdidos ao efectuar a diferença $x - y$.

[1.9] Considere um sistema de ponto flutuante FP(10, 7, -38, 38) com arredondamento simétrico. Sendo $u = 0.5 \times 10^{-6}$ a unidade de arredondamento do sistema e $v = 0.9u$ calcule $\mathrm{fl}(1+u)$ e $\mathrm{fl}(1+v)$.

[1.10] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \cos x$, e os seguintes dois algoritmos para o cálculo de $z = f(x)$:

$$(1)\ \ u = \cos x, \qquad z = 1 - u;$$

$$(2)\ \ u_1 = \frac{x}{2}, \qquad u_2 = \sin u_1, \qquad u_3 = u_2^2, \qquad z = 2u_3.$$

(a) Determine para que valores de x o cálculo de $f(x)$ conduz a um problema mal posto.

(b) Determine as expressões dos erros relativos dos dois algoritmos.

(c) Determine para que valores de x os algoritmos são numericamente instáveis.

[1.11] Sejam $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ valores aproximados de x, y, z, respectivamente, com erros relativos $\delta_{\tilde{x}}, \delta_{\tilde{y}}, \delta_{\tilde{z}}$. Determine uma estimativa do erro relativo cometido no cálculo de $v = xy + z$ num sistema de ponto flutuante com unidade de arredondamento u e usando os valores aproximados.

[1.12]* Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ e os três algoritmos seguintes para o cálculo de $z = f(x, y)$:

$$(1)\ \ z = x \times x - y \times y;$$

$$(2)\ \ z = (x + y) \times (x - y);$$

$$(3)\ \ z = (x + y) \times x - (x + y) \times y.$$

(a) Determine as expressões dos erros relativos dos três algoritmos.

(b) Supondo que x e y são representados exactamente no sistema de ponto flutuante utilizado, determine para cada algoritmo condições para as quais este algoritmo é *numericamente de mais confiança* que os outros.

[1.13] Considere o seguinte algoritmo para o cálculo de $z = \phi(x)$, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} z = \psi(u), & \psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \qquad u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \\ u_i = \theta_i(x), & \theta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \end{cases}$$

onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p, \psi$ são $p+1$ funções elementares. Determine a expressão do erro relativo de $\tilde{z}$ em termos dos erros relativos das componentes de x e dos erros de arredondamento no cálculo dos valores das funções $\theta_1, \ldots, \theta_p, \psi$.

[1.14] Considere o método iterativo a um passo com função iteradora $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$z_{n+1} = g(z_n), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad z_0 \text{ dado.}$$

Determine o erro relativo de $\tilde{z}_{n+1}$ expresso em termos do erro relativo do valor inicial $\tilde{z}_0$ e dos erros relativos de arredondamento no cálculo dos sucessivos valores da função g.

[1.15]* Suponha que pretende calcular a soma de três números reais a, b, c, $S = a+b+c$, usando os dois seguintes algoritmos:

$$(1)\ S_1 = (a+b)+c; \qquad\qquad (2)\ S_2 = a+(b+c).$$

(a) Para

$$a = 0.33678429 \times 10^2, \qquad b = -0.33677811 \times 10^2, \qquad c = 0.23371258 \times 10^{-4},$$

calcule o valor exacto de S.

(b) Para os valores de a, b, c da alínea (a), e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10, 8, -10, 10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de S usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo (1) em termos dos erros relativos das parcelas e dos erros de arredondamento das duas operações. Utilize este resultado para concluir qual a ordem por que deve proceder à soma por forma a minimizar os efeitos dos erros de arredondamento.

[1.16]* Considere o polinómio definido por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

e os dois seguintes algoritmos para o cálculo de $f(x)$:

$$(1)\ \ f_1(x) = x \times (x \times x) + a \times (x \times x) + b \times x + c;$$
$$(2)\ \ f_2(x) = \big((x+a) \times x + b\big) \times x + c.$$

O algoritmo (2) é designado por algoritmo de Horner.

(a) Para $a = -6.1,\ b = 3.2,\ c = 1.5$, calcule o valor exacto de $f(4.71)$.

(b) Para $a = -6.1,\ b = 3.2,\ c = 1.5$, e supondo que efectua os cálculos no sistema FP(10, 3, -10, 10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de $f(4.71)$ usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo de Horner em termos dos erros relativos de a, b, c, x e dos erros de arredondamento das operações efectuadas.

[1.17]* Considere a equação quadrática

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

com coeficientes b e c reais positivos. Considere os dois seguintes algoritmos para o cálculo das raízes x_1 e x_2 da equação:

$$\begin{aligned} &(1)\ \ x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \qquad && x_2 = -b + \sqrt{b^2 - c}; \\ &(2)\ \ x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \qquad && x_2 = \frac{c}{x_1}. \end{aligned}$$

(a) Para $b = 34.56,\ c = 1$, verifique que as raízes têm os valores $x_1 = -69.105529\ldots$ e $x_2 = -0.014470622\ldots$

(b) Para $b = 34.56$, $c = 1$, e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico, obtenha valores aproximados para as raízes usando os algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine as expressões dos erros relativos dos dois algoritmos indicados em termos dos erros relativos dos coeficientes b, c e dos erros de arredondamento das operações efectuadas. Suponha que a raiz quadrada é uma operação elementar.

[1.18] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

(b) Suponha que o sistema é resolvido numa calculadora onde os números são representados num sistema de ponto flutuante com 6 dígitos na mantissa. Que solução obteria nesse caso? Compare com a solução exacta.

(c) Suponha que o sistema é resolvido na mesma máquina, mas usando pesquisa parcial de pivot. Qual é o resultado nestas condições? Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

[1.19] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^6 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que este sistema é equivalente ao do exercício anterior.

(b) Será que, neste caso, a pesquisa parcial de pivot permite superar os efeitos dos erros de arredondamento, como acontecia no exercício anterior? Justifique.

(c) Resolva o sistema, utilizando o método da pesquisa total de pivot. Comente.

[1.20]* Considere o sistema linear

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b,$$

onde A é uma matriz 2×2 não singular de elementos reais e b é um vector de $\mathbb{R}^2$, ambos supostos conhecidos.

(a) Para

$$A = \begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

verifique que a solução exacta do sistema é $x = 10.00,\ y = 1.000$.

(b) Supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico, determine as soluções aproximadas do sistema pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

(c) Determine os erros relativos das soluções aproximadas obtidas na alínea (b).

(d) Para A e b com componentes arbitrárias, sem erros inerentes e com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado, determine a expressão dos erros relativos dos valores aproximados $\tilde{x}, \tilde{y}$ de x, y, obtidos pelo método de eliminação de Gauss, em termos dos erros de arredondamento das operações utilizadas.

[1.21] Considere o sistema linear

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com 6 dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot. Compare os resultados e comente.

2. MÉTODOS ITERATIVOS

[2.1] Seja N uma norma num espaço vectorial E. Mostre que

$$\|x-y\|_N \;\geq\; |\|x\|_N - \|y\|_N|\,, \qquad \forall x,y\in E.$$

[2.2] Sejam $p,q\in\,]1,\infty[$ expoentes conjugados, isto é, tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

a) Demonstre a desigualdade de Young,

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\,, \qquad \forall\, a,b\geq 0.$$

b) Demonstre a desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q}, \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{C}^n.$$

c) Mostre que a *norma-p*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1\leq p<\infty,$$

satisfaz à *desigualdade de Minkowski* (desigualdade triangular)

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x,y\in\mathbb{C}^n.$$

[2.3] Chama-se *esfera unitária* em $\mathbb{R}^n$ segundo a norma-p ao subconjunto

$$S_p = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p = 1\}, \qquad 1\leq p\leq\infty.$$

Represente graficamente no plano $\mathbb{R}^2$ as esferas unitárias S_p.

[2.4]* Sendo $x\in\mathbb{C}^n$ mostre que:

(a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$; **(b)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$; **(d)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$; **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

[2.5]* Sendo $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ determine a ordem de convergência das sucessões com o seguinte termo geral:

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^a}$;

b) $v_n = 1 + \dfrac{1}{a^n}$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^n}}$;

d) $y_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^{n^2}}}$;

e) $w_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{4^n}$.

[**2.6**] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Esta solução é conhecida como **sucessão de Fibonacci**. Mostre que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

[**2.7**]* Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+3} - 8x_{m+2} + 20x_{m+1} - 16x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4. \end{cases}$$

[**2.8**] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\, x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\, x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \end{cases}$$

onde α, β são números reais.

3. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

[3.1] Para calcular a menor raiz positiva da equação

$$x^2 - 101x + 1 = 0,$$

considere as fórmulas

$$x = \frac{101 - \sqrt{101^2 - 4}}{2}, \qquad x = \frac{2}{101 + \sqrt{101^2 - 4}},$$

e ainda o método iterativo

$$x_0 = 0, \qquad x_{m+1} = \frac{x_m^2 + 1}{101}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Use cada um dos referidos métodos e comente a precisão dos resultados obtidos sabendo que o valor da raiz é 0.0099019608794976148. . .

[3.2] Tente localizar os zeros do polinómio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

no intervalo [0.975, 1.035] estudando as mudanças de sinal ocorridas em pontos distanciados de 0.001. Não utilize a simplificação

$$p(x) = (x - 1)^4,$$

que fornece imediatamente a única raiz do polinómio.

[3.3]* Considere a equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma e uma só raiz z no intervalo $[-3.5, -2.5]$.

(b) Utilize o método da bissecção para determinar um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.05.

(c) Determine o número de iteracções do método da bissecção suficientes para garantir que o erro absoluto do valor aproximado da raiz z seja inferior a 10^{-6}.

[3.4] Considere a equação

$$\sin x - e^{-x} = 0.$$

(a) Mostre que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

(b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

(c) Determine o número m de iterações do método da bissecção necessárias para garantir que $|z - x_m| < 10^{-6}$.

[3.5]* Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem apenas três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-1, 0], \qquad z_2 \in [0, 1], \qquad z_3 \in [4, 5].$$

(b) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2},$$

converge para z_2, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(c) Determine um valor aproximado da raiz z_2 pelo método da alínea (b) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(d) Mostre que não é possível usar o método da alínea (b) para obter um valor aproximado da raiz z_3, embora z_3 seja um ponto fixo de g.

[3.6]* Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0.$$
para a qual foi verificado na alínea (a) do Exercício [3.5] que tem apenas três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$.

(a) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \log(4x^2),$$

converge para z_3, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [4, 5]$.

(b) Determine um valor aproximado da raiz z_3 pelo método da alínea (a) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c) Mostre que não é possível usar o método da alínea (a) para obter valores aproximados das raízes z_1 e z_2.

[3.7] Considere a equação
$$f(x) = 1 - 2x + 2e^{-x} = 0,$$
e o seguinte método iterativo:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m + \frac{f(x_m)}{2 + \alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real z tal que $z \in [0, 1]$.

(b) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método iterativo converge para a raiz z, qualquer que seja $x_0 \geq 0$.
Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

(c) Determine valores aproximados da raiz z com um erro inferior a 10^{-5} usando o método iterativo com $\alpha = 0.4$ e $\alpha = 0.8$. Considere em ambos os casos $x_0 = 2$.

(d) Determine o valor de α para o qual a convergência do método iterativo para a raiz z é a mais rápida possível.

[3.8]* Considere os seguintes métodos iterativos:

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ x_{m+1} = g_1(x_m), & m \geq 0, & g_1(x) = -16 + 6x + \dfrac{12}{x}, \quad x \neq 0; \\
(2)\ x_{m+1} = g_2(x_m), & m \geq 0, & g_2(x) = \dfrac{12}{1+x}, \quad x \neq -1; \\
(3)\ x_{m+1} = g_3(x_m), & m \geq 0, & g_3(x) = \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x \neq 0; \\
(4)\ x_{m+1} = g_4(x_m), & m \geq 0, & g_4(x) = \dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}, \quad a > 0.
\end{array}
$$

Determine em cada um dos casos:

(a) os pontos fixos de g_i para os quais o método converge;

(b) a ordem de convergência do método;

(c) o factor assimptótico de convergência.

[3.9]* Considere uma sucessão $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ e outra $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ construída a partir da primeira pela fórmula

$$
y_m = x_m - \frac{(x_{m+1} - x_m)^2}{x_{m+2} - x_{m+1} - (x_{m+1} - x_m)} = \frac{x_m x_{m+2} - x_{m+1}^2}{x_{m+2} - 2x_{m+1} + x_m},
$$

para $m \geq 0$.

(a) Pondo $x_m = z - e_m$ verifique que y_m se pode escrever na forma

$$
y_m = z - \frac{e_m e_{m+2} - e_{m+1}^2}{e_{m+2} - 2e_{m+1} + e_m}.
$$

(b) Mostre que se $\{x_m\}$ converge linearmente para z então $\{y_m\}$ converge para z mais depressa do que $\{x_m\}$.
Sugestão: Pondo $e_{m+1} = e_m(K + \delta_m)$, onde $0 < K < 1$ e $\delta_m \to 0$, quando $m \to \infty$, exprima $z - y_m$ em termos de δ_m, δ_{m+1} e K, e finalmente verifique que

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{z - y_m}{z - x_m} = 0.
$$

(c) Tomando $x_0 = 6,\ x_{m+1} = g(x_m),\ m \geq 0$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6.28 + \sin x$, e $z = 6.01550307297\ldots$ calcule $x_m, z - x_m$ para $m = 0, 1, \ldots, 9$ e $y_m, z - y_m$ para $m = 0, 1, \ldots, 7$.

Nota. A utilização da sucessão $\{y_m\}$ para acelerar a convergência da sucessão $\{x_m\}$ é conhecida pelo método Δ^2 de Aitken para aceleração da convergência de uma sucessão.

[3.10] Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0.$$

(a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

(b) Considere a seguintes sucessões

$$\text{(S1)} \;\; x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}}; \qquad\qquad \text{(S2)} \;\; x_{m+1} = \ln{(3x_m^2)}.$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

(c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

(d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação?

(e) Determine uma função iteradora g tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

[3.11] Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad\qquad x_{m+1} = 1 - \frac{1}{bx_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

onde b é um número real dado.

(a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) Considere $b = \frac{25}{4}$. Usando a definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{m\to\infty} x_m$.

(c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ e que se verifica

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^m, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

[3.12] Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1).$$

(a) Prove que a sucessão definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, converge para um número $z \in [-1, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Determine z e a ordem de convergência.

(b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \ldots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea (a)?

[3.13] A equação $x^2 = a$, com $a > 0$, pode escrever-se sob a forma $x = g(x)$, onde $g(x) = a/x,\ x \neq 0$. Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \neq \sqrt{a}$.

[3.14] Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{14}\left(1 + e^x + x^3\right).$$

(a) Sendo $\{x_m\}$ a sucessão numérica definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, mostre que esta sucessão tem um limite finito $z \in [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo [2,3]. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

[3.15] Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = g(x)$, onde $g \in C^1(\mathbb{R})$, pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789, \qquad x_5 = 0.43814.$$

Sabendo que $|g'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

[3.16] Considere os métodos iterativos:

$$(1)\ \ x_{m+1} = g_1(x_m), \quad m = 0, 1, \ldots, \qquad g_1(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x);$$

$$(2)\ \ x_{m+1} = g_2(x_m), \quad m = 0, 1, \ldots, \qquad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}.$$

(a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

(b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro inferior a 10^{-6}. Determine a ordem da convergência para cada uma das iterações?

[3.17] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 + \frac{1}{1+x^2}.$$

Aproxime, com um erro inferior a 10^{-4}, todas as raizes da equação $f(x) = 0$.

[3.18] Pretende-se determinar um valor x que verifique a equação

$$\cos(x) = -\cos(x + a\cos(x)).$$

(a) Mostre que se $a \neq 0$ isso é equivalente a encontrar $z = g(g(z))$, com

$$g(x) = x + a\cos(x),$$

e que se $a = 1$, g tem um único ponto fixo no intervalo $I = [1, 3]$. Justifique que para $a = 1$ a solução da equação é única em I e coincide com o ponto fixo de g.

(b) Considere os valores de (a). Calcule duas iterações pelo método do ponto fixo aplicado à função g começando com $x_0 = \pi/2$ e com $x_0 = 1$. O que pode concluir? Calcule o valor exacto do erro $|e_2|$ com 8 dígitos correctos, quando começa com $x_0 = 1$. Mostre que a ordem de convergência local é cúbica.

(c) Considere os valores de (a). Começando com $z_0 = 1$, e sendo $z_m = g(z_{m-1})$, considere os pontos (x_m, y_m) com $x_m = \log|z - z_m|$ e $y_m = \log|z - z_{m+1}|$, onde z é o ponto fixo de g. Quando $m \to \infty$ os pontos (x_m, y_m) irão aproximar-se de uma recta $y = \alpha x + \beta$. Determine os valores dos coeficientes α e β.

[3.19] Mostre que, para $a > b \geq 1$, a sucessão

$$x_0 = 1, \qquad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

converge alternadamente para a solução da equação $x^2 - ax - b = 0$ que se encontra no intervalo $[a, a + b]$.

Nota. Esta sucessão define aquilo que se designa por uma *fracção contínua*, ou seja,

$$x = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots}}}$$

no caso particular em que $a_m = a, b_m = b$.

[3.20] Ao utilizar o método do ponto fixo para determinar uma raiz de uma equação, foram obtidos os valores

$$x_3 = -0.914260304, \qquad x_4 = -0.825329540,$$
$$x_5 = -0.884002249, \qquad x_6 = -0.847330076.$$

(a) Sabendo que a função iteradora era um polinómio do quarto grau, da forma $p(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, determine aproximadamente as duas raízes reais da equação.

(b) Determine os valores possíveis para x_2.

(c) Determine uma estimativa para a majoração do erro absoluto em x_{20}.

[3.21] Seja $g \in C([a,b])$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

(a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a,b]$.

(b) Mostre que se $g \in C^1([a,b])$ então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. O que pode concluir quanto à contractividade de g nesse intervalo?

[3.22] Considere

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x),$$

uma equação em $\mathbb{R}$ e sejam z_1 e z_2 duas raízes consecutivas da equação (ou seja, não existe nenhuma outra raiz entre elas).

(a) Mostre que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $|g'(z_1)| < 1$ então $g'(z_2) \geq 1$.

(b) Suponha que $z_2 \in I = [a,b]$, que $|g'(x)| > 1$, $\forall x \in I$, e que $I \subseteq g(I)$. Mostre que o método iterativo $x_{m+1} = g^{-1}(x_m),\ m = 0, 1, \ldots$, converge para z_2 qualquer que seja $x_0 \in I$.

(c) Seja $f \in C^p(\mathbb{R})$, tal que a raiz z_2 tem multiplicidade $p \geq 1$, e seja g tal que $g'(z_2) > 1$. Indique uma função iteradora que assegure uma convergência local linear para z_2, e uma outra que assegure convergência quadrática, para cada caso de p.

[3.23] Considere um intervalo $I = [a,b]$ que tem um único ponto fixo z de uma função $g \in C^1(I)$. Seja $g'(z) = 1$.

(a) Mostre que se $0 < g'(x) < 1, \forall x \in I \backslash \{z\}$, então o método do ponto fixo converge qualquer que seja $x_0 \in I$.
Sugestão: Verifique que a sucessão definida pelo método do ponto fixo é estritamente monótona e limitada.

(b) Aplique este resultado para mostrar que $x_{m+1} = \sin(x_m)$ converge para 0, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

[3.24]* Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16.$$

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(b) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.0, 1.2]$ converge para a raiz z_1.

(c) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.25]* Considere o polinómio do Exercício [3.24].

(a) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [2.6, 2.8]$ converge para a raiz z_2.

(b) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.26]* Determine, usando o método de Newton, com um erro inferior a 10^{-6}, o valor mínimo de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \qquad \forall x \geq 0.$$

[3.27]* Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt[p]{c}$, onde $c > 0$ e $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$:

(1) O método de Newton aplicado à função $f(x) = x^p - c$;

(2) O método de Newton aplicado à função $F(x) = x^q f(x),\ q \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que o método (1) converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(b) Determine o valor de q para o qual o método (2) tem ordem de convergência 3.

(c) Mostre que o método (2), com $q = \dfrac{1-p}{2}$, converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(d) Calcule $\sqrt[3]{231}$ com um erro absoluto inferior a 10^{-9}, usando:

(i) o método (1);

(ii) o método (2), com $q = -1$.

[3.28] Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ da equação do Exercício 3.5.

(a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a ordem de convergência do método.

(b) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1. Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.

[3.29] Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0,$$

no intervalo [1, 2]. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Que tipo de convergência se tem? Indique uma estimativa para o erro absoluto de x_3.

[3.30] Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes

positivas da equação
$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

(a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo $[2.6, 3]$ estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).

[3.31] Mostre que a equação
$$\ln x - (x-2)^2 = 0,$$
tem duas e só duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$. Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

[3.32] Para calcular a raiz quadrada do número $a > 0$ recorre-se frequentemente ao método iterativo
$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = \frac{1}{2}(x_m + \frac{a}{x_m}), \qquad m = 0, 1, \ldots$$

(a) Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

(b) Mostre que o erro do método satisfaz a condição
$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$
onde $e_m = z - x_m$ e z é a raiz.

[3.33] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^4. Considere a seguinte modificação do método de Newton para a aproximação dos zeros de f:
$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\Phi(x_m)}{\Phi'(x_m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$
onde $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostre que o método tem ordem de convergência quadrática também no caso em que os zeros de f são múltiplos.

[3.34] Construa uma tabela com valores de y para os valores de $x = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$, onde y é definido implicitamente em função de x pela expressão
$$3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 = 3,$$

utilizando o método de Newton.

[3.35]* Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16,$$

para o qual foi verificada no Exercício [3.24] a existência de três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(a) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [5.0, 5.2]$ converge para a raiz z_3.

(b) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.36]* Considere a equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real, z, tal que $z \in [1, 2]$.

(b) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [1, 2]$ converge para a raiz z.

(c) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.37] Considere a função

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

(a) Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

(b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

(c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

(d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em (b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

[3.38] Considere a equação

$$f(x) = x\tan(x) - 1 = 0.$$

Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

[3.39] Considere a equação

$$e^x + x^2 - 2 = 0.$$

(a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5,\ 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I daquele intervalo que contenha a raiz.

(b) Escolha duas iteradas iniciais x_0 e x_1 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_2.

(c) Indique uma majoração do erro absoluto da iterada x_3 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

[3.40] Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

(a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

(b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1, x_1 = 2$, verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

[3.41] Sabendo que $h \in C^2(I)$ e $h' \in C^1(I)$ são funções crescentes, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação

$$f(x) = x + h(x) = 0,$$

usando o método

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{(x_m - x_{m-1})f(x_m)}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Verifique que f tem uma raiz única em I e que existem valores a, $b \in I$ para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

[3.42] A equação

$$e^{-x} - \sin(7x) = 0,$$

possui uma única raiz no intervalo $[0.5,\ 1.0]$. Compare as iteradas obtidas pelo método da bissecção e pelo método da secante com iteradas iniciais $x_0 = 0.5, x_1 = 1.0$.

4. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

[4.1]* Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ mostre que:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$;

(b) $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\,\|A\|_\infty$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$;

(e) $\dfrac{1}{n}\,\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq n\,\|A\|_1$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

[4.2] Mostre que a norma matricial associada à norma da soma em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

[4.3]* Mostre que a norma matricial associada à norma do máximo em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

[4.4] Mostre que a norma matricial associada à norma euclidiana em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)},$$

onde $A = \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e A^* é a matriz tranposta conjugada de A.

[4.5] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$. Supondo que são conhecidos os valores próprios de A, determine:

(a) os valores próprios de A^{-1} (admitindo que A é invertível);

(b) os valores próprios de A^m, $m = 1, 2, \ldots$;

(c) os valores próprios de $A + c\,I$, onde c é uma constante.

[4.6] Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz hermiteana, isto é, uma matriz tal que $A^* = A$, mostre que $\|A\|_2 = r_\sigma(A)$.

[4.7] Seja $U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz unitária, isto é, uma matriz tal que $UU^* = U^*U = I$. Mostre que:

(a) Os valores próprios de U têm módulo um.

(b) $\|U\|_2 = 1 = r_\sigma(U)$.

[4.8] Seja $A, B, U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$, U unitária. Mostre que:

(a) As matrizes A e U^*AU têm os mesmos valores próprios.

(b) $\|B\|_2 = \|UB\|_2 = \|BU\|_2$.

[4.9] Considere a norma de Frobenius, definida para qualquer $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ por

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Mostre que:

(a) se $A, B \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F;$$

(b) se $A, B \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|AB\|_F \leq \min\{\|A\|_2 \|B\|_F + \|A\|_F \|B\|_2\};$$

(c) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{C}^n$ então

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2;$$

(d) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F;$$

(e) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|A\|_2 = \|UA\|_F = \|A\|_F;$$

(f) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2},$$

onde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, são os valores próprios de A;

(g) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

[4.10] Seja M uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial V. Mostre que:

(a) $\|I\|_M = 1$, onde I é a matriz identidade;

(b) se A é invertível, então

$$\|A^{-1}\|_M \geq \frac{1}{\|A\|_M}.$$

[**4.11**] Mostre que a norma de Frobenius não está associada a nenhuma norma vectorial.

[**4.12**] Seja $Q \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz não singular.

(a) Mostre que a função $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \|Q^{-1}x\|_\infty$, define uma norma no espaço vectorial $\mathbb{C}^n$.

(b) Verifique que a norma matricial M associada à norma V da alínea (a) tem a seguinte expressão:

$$\|A\|_M = \|Q^{-1}\,A\,Q\|_\infty$$

[**4.13**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz tal que $\|A\| < 1$ para alguma norma matricial associada a uma norma vectorial em $\mathbb{C}^n$. Prove que a matriz $I - A$ é não singular e que

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}\,.$$

[**4.14**]* Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz inversa de A usando o método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot.

(b) Determine os valores próprios de A usando o método de Newton para calcular as raízes do polinómio característico de A.

(c) Determine os números de condição da matriz A relativos às normas $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$.

[**4.15**]* Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \gg 1.$$

(a) Mostre que os valores próprios da matriz A e os correspondentes vectores próprios são

$$\lambda_1 = \alpha + \beta, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\beta-1}{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha} \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \sqrt{\alpha^2 + 1}$.

(b) Determine $\mathrm{cond}_p(A), \;\; p = 1, 2, \infty$.

(c) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1, \;\; \tilde{b} = b + \varepsilon u_1, \;\; \varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

(d) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\bar{x} = \bar{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1, \;\; \bar{b} = b + \varepsilon u_2, \;\; \varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x - \bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|b - \bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

[4.16]* Considere a matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A), \mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_*(A)$.

(c) Considere os sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde A é tomada com $\alpha = \beta = 1$, $b \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|b\|_\infty = 1$, $\tilde{b}$ difere de b a menos de 10^{-2m} em cada uma das componentes e $\tilde{A}$ é obtida a partir de A por adição de 10^{-2m} aos seus elementos; m é tal que $n10^{-m} \equiv \mu < 1$. Apresente uma estimativa para o erro relativo da solução $\tilde{x}$ em relação à solução x.

[4.17] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \ \ 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \ \ 1]^T$.

(a) Determine $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \epsilon \ \ 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

(c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1 \ \ 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b - \bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x - \bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

[4.18] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $\mathrm{cond}_1(A)$.

(b) Ao resolver um sistema $Ax = b$ com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \varepsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução, $\|\delta_x\|_1$.

[4.19] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 & -\dfrac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a}{1+a^2} & 0 & \dfrac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule $\mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_1(A)$.

(c) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz? E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

[4.20] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Suponha que ao resolver o sistema $A\,x = b$, com um certo valor de a, obteve a solução $\tilde{x} = (1, 1, 1)$. Supondo que o valor de a está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de a.

[4.21] Considere um sistema $Ax = b$ em que o segundo membro é dado com um erro relativo $\|\delta_b\|_1 < 0.1$. Sabendo que a matriz é simétrica e que $\|A\|_\infty \leq 7$, $\|A^{-1}\|_1 \leq 1$, determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$.

[4.22] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A)$ e $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sendo x_1 e x_2 as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$, respectivamente, determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

[4.23] **(a)** Sendo $A, X \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, A não singular, e $\|\cdot\|$ uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial em $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\|I - XA\| \leq \mathrm{cond}(A)\, \|I - AX\|.$$

(b) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8.9999 \end{bmatrix}$$

e a seguinte aproximação para a matriz inversa A^{-1}

$$X = \begin{bmatrix} -10067.2 & 20099.9 & -9952.58 \\ 20132.3 & -40198.9 & 19905.2 \\ -10065.5 & 20099.3 & -9952.58 \end{bmatrix}.$$

Calcule $I - AX$ e $I - XA$. Obtenha uma estimativa para $\text{cond}_1(A)$.

[4.24]* Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular, superior ou inferior, não singular. Mostre que quer o método de Jacobi quer o método de Gauss-Seidel, com condição inicial arbitrária, permitem obter a solução exacta do sistema num número finito de iteradas e determine quantas.

[4.25] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Compare as dez primeiras iteradas dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0]^T$

[4.26] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{bmatrix}.$$

Aplique o método de Gauss-Seidel a este sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0.33116 \;\; 0.70000]^T$.

[4.27] A matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se uma *matriz de diagonal estritamente dominante por linhas* (MDEDL) se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mostre que uma MDEDL é não-singular.

[4.28] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 + \cos\theta \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = [0 \;\; -212 \;\; 10^5]^T$.

(b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iteração com $x^{(0)} = [10^5 \;\; 10^6 \;\; 0]^T$.

(c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?

[4.29]* Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -10 \\ 10 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 22 \\ -21 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

(a) Por reordenação das linhas obtenha um sistema $A'x = b'$ para o qual os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes para a sua solução para qualquer condição inicial. Justifique.

(b) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Jacobi com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

(c) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Gauss-Seidel com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

[4.30] Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na $4^{\underline{a}}$ iterada. Considere $x^{(0)} = [-4 \;\; -4 \;\; -4]^T$.

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

[4.31] Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

(a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de

Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [1\ \ 1\ \ 1]^T$.

[4.32] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Identifique a matriz B e o vector c. Se $x^{(0)} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(k)}$.

[4.33] Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|\rho| < 1$, onde $\rho = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) Supondo que para ambos os métodos a convergência está garantida calcule o limite

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \right)^{1/k}.$$

(c) Nas condições da alínea (b), partindo de uma aproximação inicial arbitrária $x^{(0)}$, quantas iterações é necessário efectuar (utilizando cada um dos métodos) para obter uma aproximação $x^{(k)}$, tal que $\|e^{(k)}\| \leq \varepsilon$?

(d) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max\left(\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|} \right)$.

(e) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [2\ \ 1]^T$. Com base na alínea (d) determine um majorante do erro do resultado obtido.

[4.34] Considere as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

(a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

(b) Considere $\beta = 1, \alpha = 2$, e $b = [0\ \ 0\ \ 0]^T$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = [0\ \ 0\ \ 0]^T$.

(i) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [0\ \ 2\ \ 1]^T$ ou outro vector qualquer, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que o raio espectral da matriz C associada ao método de Jacobi é 0).

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(2)} = x^{(1)} = [0\ \ 2\ \ 1]^T$. Verifique que esse vector é um vector próprio associado ao valor próprio 1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

[4.35] Pretende-se determinar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 2^n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema.

(b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, assumindo que $e^{(0)} = [-1\ \ 2^n\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]^T$.

(c) Comente quanto à rapidez de convergência quando $n \to \infty$.

[4.36]* Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 3 & 4 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é definida positiva.

Nota. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se *definida positiva* se e só se $x^T Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uma matriz é definida positiva se e só se são positivos os determinantes de todos os menores principais de A; chama-se *menor principal* de A à submatriz de dimensão k de A cujos elementos são os elementos das primeiras k linhas e k colunas de A, com $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Determine os valores de α para os quais a matriz $2D - A$, onde D é uma matriz diagonal com a mesma diagonal principal que A, é definida positiva.

(c) Determine os valores de α para os quais o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b, \quad \forall b \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(d) Determine os valores de α para os quais o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b, \quad \forall b \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

[**4.37**]* Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para o qual foi verificado no Exercício [4.36] que o método de Gauss-Seidel converge para a sua solução para qualquer condição inicial enquanto que o método de Jacobi não converge para todas as condições iniciais. Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$ se e só se as condições iniciais pertencerem ao plano

$$\left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = \frac{1}{8} \right\}.$$

[**4.38**] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, caso utilizar o método de Gauss-Seidel, a convergência depende da aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial (diferente da solução exacta) para a qual o método é convergente e uma aproximação inicial para a qual o método é divergente.

[**4.39**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e definida positiva.

(a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que se, além de $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ ser simétrica e definida positiva, também a matriz $2D - A$, onde $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ é definida positiva, então o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

[**4.40**]* Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$0 < \alpha < 1$, e b é um vector arbitrário. Estude a convergência do método de Gauss-Seidel modificado com parâmetro $\omega > 0$ para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial para todos os valores de α e ω.

[**4.41**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

e b é um vector arbitrário. Determine os valores do parâmetro $\omega \in \mathbb{R}^+$ para os quais o método de Jacobi modificado converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial e o valor ω_{opt} para o qual o método converge mais rapidamente.

[**4.42**] **(a)** Mostre que a condição $\omega \in (0, 2)$ é necessária para que o método das relaxações sucessivas convirja para a solução do sistema $Ax = b$.

(b) Prove que, se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ for simétrica e definida positiva, então a condição $\omega \in (0, 2)$ é suficiente.

[**4.43**]* Seja $A \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ uma matriz tal que os seus valores próprios são complexos:

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib.$$

Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica de um sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método da iteração simples*:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^2,$$

onde ω é um parâmetro real. Determine:

(a) o intervalo de valores de ω, para os quais está garantida a convergência do método;

(b) o valor ω_{opt}, para o qual se obtém, em princípio, a maior rapidez de convergência, e o valor correspondente do raio espectral da matriz iteradora do método $C(\omega) = I - \omega A$.

[4.44] Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Sabendo que os valores próprios de A satisfazem $\lambda_i \in [5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}], i = 1, \ldots, 5$, determine os valores de ω para os quais o método iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

converge para x qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$.

(b) Seja $\omega = 0.2$. Partindo de $x^{(0)} = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$, calcule as três primeiras iteradas pelo método da alínea a). Estime o erro da iterada $x^{(3)}$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

[4.45] Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?

(b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

(c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

[4.46] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz não-singular e seja $C \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma aproximação de A^{-1}. Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica do sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método de correcção residual*:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + Cr^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(a) Mostre que se $\|I - CA\| < 1$, então o método converge para x qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Seja $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B$, com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$. Aproxime a solução do sistema $A(\varepsilon)x = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$ e $\varepsilon = 10^{-4}$ pelo método de correcção residual com um erro inferior a 10^{-5}. Tome $C = A_0^{-1}$, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

5. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

[5.1]* Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 4x_2 - \sin x_1 - \cos x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem apenas duas soluções em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule valores aproximados das duas soluções usando em cada caso quatro iteradas do método do ponto fixo com a função iteradora apropriada.

(c) Obtenha uma estimativa do erro das duas aproximações obtidas na alínea (b) usando a norma do máximo.

[5.2] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{0.5}{1 + (x_1 + x_2)^2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{0.5}{1 + (x_1 - x_2)^2} \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem uma única solução z em $\mathbb{R}^2$.

(b) Obtenha um valor aproximado $x^{(4)}$ para a solução usando quatro iteradas do método do ponto fixo. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(4)}\|_\infty$.

[5.3] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2}{4} \cos(x_1) = 0 \\ 1 - x_2 + |x_1 - 1| = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem uma e uma só solução $z \in [0, 1] \times [1, 2]$.

(b) Determine uma aproximação da solução pelo método do ponto fixo cujo erro absoluto seja inferior a 0.05.

[5.4] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = f(x_1 + x_2) \\ x_2 = g(x_1 + x_2) \end{cases}$$

em que as funções f e g verificam $|f'(t)| < \alpha$, $|g'(t)| < \beta$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e em que $f(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$, $g(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$.

(a) Mostre que existe uma única solução do sistema em $\mathbb{R}^2$ se $\alpha + \beta < 1$, que essa solução se encontra em $[a, b] \times [a, b]$, e que o método do ponto fixo converge, quaisquer que sejam os valores iniciais em $\mathbb{R}$.

(b) Reduza o sistema anterior à resolução de duas equações em $\mathbb{R}$, e mostre o mesmo resultado que em a).

(c) Concretize os resultados anteriores para o sistema

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\cos(x_1 + x_2) - \cos^2\left(\frac{1}{5}(x_1 + x_2)\right) \\ x_2 = \sin\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2)\right) + \frac{1}{4}\sin^2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

(d) Começando com $(0,0)$, determine uma iterada pelo método de Newton em $\mathbb{R}^2$ para a aproximação da solução do sistema anterior.

[5.5]* Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon\cos x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

onde ε é um parâmetro real.

(a) Mostre que para $-\dfrac{1}{2} < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

(b) Para $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, obtenha um valor aproximado da solução z pelo método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ com um erro inferior a 0.1 (usando a norma do máximo).

(c) Para $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, determine quantas iteradas do método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ seriam necessárias para garantir um erro da solução inferior a 10^{-6} (usando a norma do máximo).

[5.6] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

(b) Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

(c) Obtenha um valor aproximado $\tilde{x}^{(2)}$ para a solução do sistema usando duas iteradas do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_\infty$.
Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas lineares que ocorrem na aplicação do método de Newton generalizado.

[**5.7**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 2 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right],$$

e que esta é também a única raiz do sistema em $\mathbb{R}^2$.

(b) Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [1\ 2]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_1$.

(c) Obtenha um valor aproximado $\tilde{x}^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado partindo da condição inicial $\tilde{x}^{(0)} = [1\ 2]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_1$.
Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear que ocorre na aplicação do método de Newton generalizado.

[**5.8**] Considere um sistema de equações escrito na forma $F(x) = 0$, e seja $J_F(x)$ a matriz jacobiana de F calculada em x.

(a) Mostre que se existir um $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\|I + \omega J_F(x)\| \leq L < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, então o sistema possui uma única solução em $\mathbb{R}^n$.

(b) Conclua que o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + \sin(x_3) = 1 \\ x_1 + 4x_2 + \cos(x_3) = 1 \\ \sin(x_1) + \cos(x_2) + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução em $\mathbb{R}^3$, que está no conjunto $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right] \times \left[-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right]$.

(c) Determine uma aproximação dessa solução calculando duas iterações pelo método de Newton, começando com a iterada inicial $x^{(0)} = 0$.

[**5.9**]* Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) - 10 = 0 \\ 3x_2 + x_3^2 - 8 = 0 \\ 3x_1 + x_3^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

(a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [\alpha \;\; \beta \;\; 1]^T$, onde α, β são números reais arbitrários.

(b) Determine o valor aproximado de outra das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [-4 \;\; -4 \;\; -4]^T$.

(c) Verifique analiticamente que o sistema tem três e só três soluções em $\mathbb{R}^3$.

[5.10] Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1^2 + 2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

(a) Tomando como aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \; 1 \; 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

(b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

[5.11] Considere o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 = 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 = \mu \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = [c \; 0 \; 0]^T$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Mostre que a matriz A pode ser escrita na forma $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária e U é uma matriz triangular superior. Utilize este resultado para concluir para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

(c) No caso de $c = 1$, utilize o resultado $A = LU$ para resolver o sistema linear e calcule $x^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

(d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

[5.12]* Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

(a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [1.35 \;\; 1.75]^T$.

(b) Obtenha uma estimativa do erro da solução aproximada obtida na alínea anterior (usando a norma do máximo).

(c) Investigue a existência de outras soluções do sistema usando o método de Newton generalizado com diferentes aproximações iniciais.

6. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

[6.1] Considere a matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$\det V = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

[6.2] Sejam $x_1, x_2, \dots, x_M$ valores reais distintos e $f_1, f_2, \dots, f_M$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Prove que existe uma única função F_M da forma

$$F_M(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{jx},$$

para a qual se tem $F_M(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, M$.

[6.3] Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e sejam $l_0, l_1, \dots, l_n$ os polinómios de Lagrange construídos nesses pontos. Mostre que

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^m l_j(x) = x^m, \qquad m = 0, 1, \dots, n]$$

[6.4] Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1,$$

onde $l_0, l_1, \dots, l_n$ são os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós $x_0, x_1, \dots, x_n$. Prove que:

(a) g é um polinómio de grau $\le n$.

(b) $g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, ..., n.$

(c) $g(x) = 0,$ para todo o x.

[6.5] Seja f um polinómio de grau m e sejam $x, x_0, x_1, \dots, x_n$, $n + 2$ pontos distintos em $[a, b]$. Deduza que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \begin{cases} p^*_{m-n-1}(x), & n < m - 1 \\ a_m, & n = m - 1 \\ 0, & n > m - 1 \end{cases}$$

onde p^*_{m-n-1} designa um polinómio de grau $m-n-1$ e a_m é o coeficiente do termo em x^m de f.

[6.6] Na tabela seguinte são apresentados valores de uma função $f \in C^2(]0,+\infty[)$:

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

(a) Obtenha o polinómio p_2 que interpola f nos três pontos tabelados, usando a fórmula de Lagrange.

(b) O mesmo que na alínea (b), mas usando a fórmula de Newton.

(c) Calcule $p_2(1.3)$ e obtenha um majorante do erro $f(1.3) - p_2(1.3)$, sabendo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

[6.7] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	1	4
$f(x_i)$	2	-2	-8

Supondo que f é um polinómio e que

$$f[-1,1,2] = 4, \qquad f[-1,1,2,4,x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2,4\},$$

determine a forma de $f(x)$.

[6.8] Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2,3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

[6.9] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

[6.10] Seja f uma função que nos nós $\{-1,1,3\}$ tem como polinómio interpolador

$$p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2.$$

(a) Sabendo que $f[-1,1,2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

[6.11] Seja $f \in C^3[0,1]$ uma função real.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio p de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0), \qquad p(1) = f(1), \qquad \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Supondo que $|f'''(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$, mostre que

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

[6.12] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x-1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

[6.13] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f,

x_i	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-17	5	-5	c

que se sabe ser um polinómio da forma

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5,$$

com a_1, a_2 reais. Que relação existe entre o polinómio interpolador de f nos 3 primeiros pontos e a função f? Determine o valor de $f(4)$.

[6.14]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(b) Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(c) Mostre que

$$\max_{x\in[-1,2]} \left|x(x-2)(x^2-1)\right| = 1.$$

Sugestão: Introduza a mudança de variável $x = \theta + \frac{1}{2}$.

(d) Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 25, \quad \forall x \in [-1,2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - p_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1,2]$.

(e) Sabendo que $f[1,2,3] = 25$ determine o polinómio interpolador de f, p_4, nos pontos $-1, 0, 1, 2, 3$.

(f) Sabendo que f é um polinómio de grau 5 com quinta derivada positiva utilize toda a informação disponível para obter a sua forma.

[**6.15**] Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual,

$$g(0) = a, \qquad g(g(0)) = 2a, \qquad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

[**6.16**] Sabendo que $f^{(n+1)}([a,b]) \subset [a,b]$, mostre que o erro de interpolação verifica, para qualquer $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|,|b|\}e^{|b-a|}.$$

[**6.17**] Suponha que os valores de f calculados nos nós $x_0, ..., x_n$ estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações $\tilde{f}_0, ..., \tilde{f}_n$.

Considere p_n o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e $\tilde{p}_n$ o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

(a) Mostre que se $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$, então

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon,$$

ende $C = (n+1)\max_k \max_{x\in[x_0,x_n]} |l_k(x)|$.

(b) No caso de nós igualmente espaçados, e $n = 2$, obtenha $C = \frac{5}{4}$.

[**6.18**] Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

[6.19] Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre um valor aproximado para a raiz de f usando interpolação inversa.

[6.20]* Seja $f \in C^1([a, b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$; logo existe um único $z \in]a, b[$ tal que $f(z) = 0$.

(a) Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos de $[a, b]$ e sejam $y_0, y_1, \ldots, y_n$ os valores de f nesses pontos, isto é, $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Escreva uma expressão para o polinómio $q_n \in \mathcal{P}_n$ que interpola f^{-1} nos nós $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

(b) Notando que $z = f^{-1}(0)$, utilize o polinómio q_3 e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) := e^{-x} - x = 0.$$

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_i}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

[6.21]* Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n + 1$ nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$, igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

(a) Mostre que se existirem constantes positivas c e M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n$ então $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Verifique que este resultado se aplica à função $f(x) = e^{3x}$.

(b) Mostre que se existirem constantes positivas c e M, $M(b - a) < e$, tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n(n + 1)!$, então também $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

[6.22] Seja f uma função indefinidamente diferenciável para $x \geq 0$ e tal que $\left|f^{(m)}(x)\right| \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e para todo o $m = 0, 1, 2, \ldots$ Seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{2}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ para cada $x \geq 0$.

[6.23] Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-i)$$

no intervalo $[0, n]$ para diferentes valores de n. Verifique que

$$\max_{t\in[0,n]} |\psi_{n+1}(t)| < n!$$

[6.24]* Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad\qquad g(x) = e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine os polinómios interpoladores de f nos pontos

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

(b) Determine os polinómios interpoladores de g nos mesmos pontos da alínea (a) para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função g.

(c) Determine os polinómios interpoladores de f nos nós de Chebyshev,

$$x_k = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f.

[6.25] Pretende-se interpolar uma função f no intervalo $[-2, 3]$ por um polinómio de grau 5.

(a) Quais os nós que deve considerar para que o erro do polinómio interpolador seja o menor possível nesse intervalo?

(b) Determine a função interpoladora correspondente a esses nós, quando

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

(c) O mesmo que em (b), considerando nós igualmente espaçados.

(d) Compare graficamente os erros obtidos em (b) e (c).

[6.26] Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0,1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh,\ j = 0, 1, \cdots, N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1 nos pontos x_j, x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ seja inferior a 10^{-6}.

[6.27] Considere a expressão do método da secante para determinar um zero z de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m)\,\frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

(a) Mostre que

$$z - x_{m+1} = -\frac{f[x_{m-1}, x_m, z]}{f[x_{m-1}, x_m]}\ (z - x_m)\,(z - x_{m-1})\,.$$

(b) Mostre que

$$z - x_{m+1} = -\frac{f''(\eta_m)}{2f'(\xi_m)}\ (z - x_m)\,(z - x_{m-1})\,,$$

onde $\xi_m \in]x_{m-1}; x_m[,\ \ \eta_m \in]x_{m-1}; z; x_m[$.

7. APROXIMAÇÃO MÍNIMOS QUADRADOS

[7.1]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine de entre os polinómios $p \in \mathcal{P}_1$ aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,p) = \left[\sum_{i=0}^{3}[f(x_i) - p(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

(b) Idem para $p \in \mathcal{P}_2$.

(c) Idem para $p \in \mathcal{P}_3$.

(d) Determine em cada um dos casos o valor mínimo da *distância* $d(f,p)$.

Nota: $\mathcal{P}_m$ designa o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a $m \in \mathbb{N}$.

[7.2] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1º grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

(b) Idem, mas para o polinómio do 2º grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M$, $\forall x \in [1.2, 1.5]$, obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.
Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

(d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau?

[7.3] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = 6, \quad f(2) = 15.$$

Obtenha a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = ax + b,$$

que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6,$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

[7.4]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0

Determine de entre os polinómios trigonométricos da forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x) + a_2 \cos(2\pi x),$$

aquele que minimiza a *distância*

$$d(f, \phi) = \left[\sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

[7.5] Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x},$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

[7.6] Considere os pontos

$$(-5, -1), \quad (-3, 0), \quad (-1, -1), \quad (1, 2).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2,$$

que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.

(c) O mesmo que em (a) para

$$g(x) = \frac{a + bx^2}{x + 1}.$$

[**7.7**] Considere a aproximação por mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 2),$$

por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3,$$

com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(\pi x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Mostre que a matriz do sistema normal não é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k.

[**7.8**] Considere os 6 pontos

$$(-1, 7), \quad (0, 6), \quad (1, 6), \quad (2, 4), \quad (4, 3), \quad (5, 1).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a - x + bx^2,$$

cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) O mesmo que em (a) usando

$$g(x) = ae^{bx} - \frac{x^2}{4},$$

e uma transformação de variáveis.

[**7.9**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados.
Sugestão: Poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis.

[**7.10**]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	5.43656	2.0	0.735759	0.270671

Determine de entre as funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(x) = \frac{1}{ax+b}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\},$$

aquela que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

[7.11] Considere Q uma matriz simétrica definida positiva e o produto interno definido em $\mathbb{R}^N$ por

$$\langle v, w\rangle_Q = v^\top Q w.$$

Supondo que queremos aproximar uma lista de pontos cujas ordenadas estão no vector $y \in \mathbb{R}^N$ por uma função

$$g = a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m,$$

onde $\phi_1, \ldots, \phi_m$ são funções linearmente independentes (para a lista de abcissas), mostre que o sistema a resolver pode escrever-se na forma

$$X^\top Q X\, a = X^\top Q\, y,$$

onde X é uma matriz $N \times m$ e $a = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_m]^\top$.

[7.12] (a) Determine qual a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a + cx^2,$$

que melhor aproxima $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$ segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) Qual o erro no ponto $x = 1$, e qual o maior erro $|f(x) - g(x)|$ nesse intervalo.

[7.13] Demonstre a seguinte propriedade dos polinómios de Chebyshev $T_n(x), n = 0, 1, \ldots$:

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0 \end{cases}.$$

[7.14]* Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a *melhor aproximação mínimos quadrados* da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \forall g,h \in C([-1,1]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

(c)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in \tilde{C}(\mathbb{R}),$$

onde $\tilde{C}(\mathbb{R})$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[g(x)]^2\,dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Hermite.

(c)

$$\langle g,h\rangle = \int_{0}^{\infty} e^{-x} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in \tilde{C}([0,\infty[),$$

onde $\tilde{C}([0,\infty[)$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{0}^{\infty} e^{-x}[g(x)]^2\,dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Laguerre.

[7.15] Considere a função

$$f(x) = \arccos x, \qquad x \in [-1,1].$$

Determine o polinómio $q_2^* \in \mathcal{P}_2[-1,1]$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{[f(x)-q(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad q \in \mathcal{P}_2[-1,1].$$

[7.16] Pretende-se obter a função

$$g(x) = a + b(2x^2-1) + c(4x^3-3x),$$

que melhor aproxima $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, no intervalo $]-1,1[$, de forma a minimizar a distância dada por

$$d(f,g) = \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{[f(x)-g(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \right\}^{1/2}.$$

(a) Determine os valores a,b,c que melhor efectuam essa aproximação.

(b) Indique qual o valor mínimo para $d(f,g)$.

[7.17] Considere o espaço linear $C^1([a,b])$ e o operador definido por

$$L(f) = \left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2}, \qquad f \in C^1([a,b]).$$

(a) Sabendo que

$$L(f+g) \leq L(f) + L(g), \qquad \forall f, g \in C^1([a,b]),$$

prove que L define um seminorma (que não é norma) em $C^1([a,b])$.

(b) Recorrendo à teoria da melhor aproximação e usando L, mostre que existem constantes reais $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ tais que

$$\int_a^b (\cos x + \bar{\alpha} x + \bar{\beta})^2 \, dx \leq \int_a^b (\cos x + \alpha x + \beta)^2 \, dx, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

8. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

[8.1]* Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(a) Determine o valor aproximado do integral usando a regra dos trapézios composta com

$$M = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8,$$

subintervalos de integração. Apresente uma tabela com as seguintes colunas:

(i) M.

(ii) $I_1^{(M)}(f)$.

(iii) A estimativa de erro obtida a partir da fórmula de erro

$$E_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

(iv) A estimativa de erro dada pela fórmula

$$\frac{1}{3}\left| I_1^{(M)}(f) - I_1^{(M/2)}(f) \right|.$$

(v) O valor do erro $\left| E_1^{(M)}(f) \right|$ calculado sabendo que o valor exacto do integral é $I = 0.746824132812\ldots$

(vi) O valor do quociente $\left| E_1^{(M)}(f) \right| / \left| E_1^{(M/2)}(f) \right|$.

(b) Repita o exercício (com excepção de (iii)) para o integral

$$\tilde{I} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

[8.2] Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-4}, utilizando:

(i) A regra dos trapézios.
(ii) A regra de Simpson.

[8.3] Suponha que a função f é definida no intervalo $[0, b]$, do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq b. \end{cases}$$

(a) Obtenha aproximações para o integral

$$I(f) = \int_0^b f(x)dx,$$

com $b = 2$ e $b = 3$, dos seguintes modos:

(i) Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.

(ii) Utilizando a regra de Simpson (simples).

(b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

(c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra de Simpson? Justifique.

[**8.4**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f definida em $\mathbb{R}$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	1/2	$-1/2$

(a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

(b) Suponha que pretendemos aproximar

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx, \qquad \text{por} \qquad I_2(f) = \int_{-2}^{2} p_2(x)dx.$$

Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j = 1, 2, 3, 4$, no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

[**8.5**] A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

N	8	16	32	64
$I_n^{(N)}$	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor $I_n^{(N)}$ representa a aproximação obtida, com $N + 1$ nós de integração. Sabendo que o valor exacto do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada (trapézios ou Simpson).

[**8.6**] Calcule o valor aproximado de

$$I = \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

usando:

(a) A regra dos trapézios composta com 5 nós de integração igualmente espaçados, e determine um majorante do erro.

(b) A regra de Simpson simples, e determine um majorante do erro.

[**8.7**] Sabe-se que a função $f \in C^4(-2, 10)$ toma os valores $f(1) = -2, f(4) = 7, f(10) = 6$, e que $1, 4$ e 10 são pontos fixos de $f \circ f$.

(a) Determine o valor aproximado de

$$I(f) = \int_{-2}^{10} f(x)dx,$$

usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

(b) Admitindo que $|f^{(4)}(x)| \leq 10$, determine um majorante do erro absoluto cometido em (a).

[**8.8**]* Calcule o valor aproximado dos integrais

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad \tilde{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

usando as seguintes fórmulas de quadratura:

$$I_1^{(6)}(f), \qquad I_2^{(6)}(f), \qquad I_3^{(6)}(f), \qquad I_6^{(6)}(f) \equiv I_6(f).$$

Determine em cada caso os erros dos valores aproximados a partir dos resultados exactos:

$$I = 0.746824132812\ldots \qquad \tilde{I} = 0.785398163397\ldots.$$

[**8.9**] Aplique a regra dos trapézios composta para aproximar os integrais

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx\,, \qquad I_2 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Estime a ordem de convergência em ambos os casos. Note que $I_1 \approx 7.95492652101284$ e $I_2 = 2$.

[**8.10**] **(a)** Obtenha a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 8, a correspondente fórmula composta e os respectivos erros.

(b) Supondo que $f \in \mathcal{P}_{n+\nu_n}$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$, mostre que o erro de integração da fórmula de Newton-Cotes de ordem n composta com $2M$ subintervalos, onde M é múltiplo de n, é dado por

$$E_n^{(2M)}(f) = \frac{I_n^{(2M)}(f) - I_n^{(M)}(f)}{2^{n+\nu_n} - 1}.$$

[8.11] Considere a regra de Simpson composta num intervalo $[a, b]$ e o valor aproximado para N subintervalos, dado por $S_N(f)$. Mostre que quando $f^{(4)}$ é constante se verifica a condição para o erro

$$15E_{2N}(f) = S_{2N}(f) - S_N(f).$$

[8.12] Seja $f \in C[a, b]$ uma função tal que f' é integrável em $[a, b]$.

(a) Prove a seguinte estimativa do erro para a regra dos trapézios composta:

$$E_1^{(N)}(f) = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} - x \right) f'(x)\, dx,$$

onde $x_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{N}$.

(b) Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx,$$

pela regra dos trapézios composta com $h = \frac{1}{6}$. Estime o erro.

[8.13] Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(x_0) + E_0(f),$$

onde

$$E_0(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24} \qquad \text{com} \qquad \theta \in \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right].$$

[8.14]* Considere o integral

$$I(f) = \int_0^1 e^x f(x)\, dx, \qquad f \in C([0, 1]).$$

(a) Determine A_0 e A_1 de modo a que a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1),$$

para aproximar $I(f)$, seja exacta para funções da forma $f(x) = a+bx$, com a e b constantes reais.

(b) Determine a expressão do erro de integração da fórmula de quadratura $I_1(f)$ obtida na alínea (a).

(c) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule $I_1(f)$ e obtenha um majorante do erro absoluto deste valor aproximado.

(d) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule um valor aproximado para $I(f)$ usando a regra dos trapézios composta com 4 subintervalos e obtenha um majorante do erro absoluto deste valor aproximado.

(e) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule o número mínimo de subintervalos a usar na regra dos trapézios composta para garantir que o erro absoluto do valor aproximado do integral seja inferior a 10^{-4}.

[**8.15**] Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, isto é, uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

(a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

(b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

(c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

[**8.16**] **(a)** Determine uma fórmula de quadratura

$$I_1(f) = 2f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar integrais da forma

$$I(f) = \int_{0}^{1} f(x)\, dx,$$

que seja exacta para os polinómios de grau 2.

(b) Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida na alínea (a).

[**8.17**] Pretende-se calcular

$$Z(\alpha, m) = \int_{-1}^{1} (x^\alpha + 2)\cos(m \arccos(x))dx.$$

(a) Considere a aproximação de $Z(1, 2)$ e de $Z(2, 2)$ usando a integração de Gauss-Legendre com dois nós de quadratura. Alguns destes valores é exacto, qual?

(b) Calcule o valor aproximado de $Z(2, m)$ usando a regra de Simpson simples. Determine o valor exacto de $Z(2, 2)$ através da fórmula do erro.

[**8.18**] **(a)** Determine uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(f) = A_0 f(-c) + A_1 f(c),$$

que seja exacta para integrais $I(x^k)$, com $k = 0, 1, 2$, onde

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx.$$

(b) Utilize a fórmula obtida em (a) para calcular exactamente

$$J = \int_{-1}^0 \frac{1-x+x^2}{x^2+1} dx.$$

(c) Calcule o valor aproximado do integral definido em (b) usando a fórmula de integração de Gauss-Legendre com 3 nós de integração.

[**8.19**] Considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

(a) Aproxime $I(f)$ pela fórmula de Gauss-Chebyshev com 2, 4 e 6 nós de integração.

(b) Estime o erro utilizando a aproximação

$$E_n(f) \approx I_{n+2}(f) - I_n(f).$$

[**8.20**] Considere os integrais

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx.$$

(a) Deduza uma fórmula de quadratura que seja exacta para $I(a + bx)$, usando um único nó de integração em $[0, 1]$.

(b) Indique a fórmula composta, e calcule uma aproximação do integral $I(\cos(x^2))$ usando 4 subintervalos.

[**8.21**] Para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx,$$

considere a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

com $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_1 = 2 + \sqrt{2}$. Determine os pesos A_0 e A_1 de tal modo que a fórmula seja pelo menos de grau 1. Mostre que a fórmula assim obtida é de grau 3.

[**8.22**]* Deduza as fórmulas de quadratura de Gauss de ordens $n = 0, 1, 2$ para calcular integrais da forma

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

Sugestão. Utilize os polinómios de Laguerre.

Nota. $I(x^k) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0$.

[**8.23**] Utilize as fórmulas de Newton-Cotes fechadas com $n = 2, 4, 6, 10$ e 14 para aproximar o integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Compare os resultados com a solução exacta $I = 2 \arctan 4 \approx 2.65163533$. Comente.

[**8.24**] Considere a equação integral (de Volterra de segunda espécie)

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) y(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le b. \tag{1}$$

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos equidistantes do intervalo $[0, b]$, com $h = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$ e seja $y(0) = f(0)$. Pretende-se aproximar os valores da solução da equação (1) nos pontos $x_i, i = 0, \ldots, n$, pelo método numérico descrito no quadro seguinte.

Aplique o método para aproximar a equação integral

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x - t) y(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le 1,$$

com $n = 10, 20$ e 40. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6}.$$

Com base nos resultados obtidos, analise a ordem de convergência do método.

MÉTODO

Para a solução exacta tem-se

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i, t) y(t)\, dt, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Para aproximar o integral

$$I(K, y) = \int_0^{x_i} K(x_i, t) y(t)\, dt,$$

usa-se uma quadratura numérica. Por exemplo, usando a regra dos trapézios composta, obtém-se

$$I(K, y) \approx Q_1^i(K, y) = h \left[\frac{1}{2} K(x_i, 0) y(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) y(x_j) + \frac{1}{2} K(x_i, x_i) y(x_i) \right].$$

Segue-se que a solução aproximada $Y_i, i = 1, \ldots, n$, satisfaz a equação

$$Y_i = f(x_i) + h\Big[\frac{1}{2} K(x_i, 0) f(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) Y_j + \frac{1}{2} K(x_i, x_i) Y_i\Big], \tag{2}$$

ou seja, uma vez conhecidos os valores de Y_j para $j \leq i - 1$, a aproximação Y_i é obtida da equação (2).

10. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

[10.1] Considere o problema de valor inicial ou de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com solução

$$y(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}\, e^{4x}.$$

(a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

(b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

(c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação para $y(0.2)$. Compare com o resultado obtido em (a).

(d) Obtenha uma aproximação para $y(0.2)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com $h = 0.2$.

[10.2] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

(a) Obtenha um valor aproximado para $y(1)$ pelo método de Heun, usando $h = 0.2$.

(b) O mesmo que em (a), pelo método de Taylor de ordem 2.

(c) Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta.

[10.3] Utilize o método do ponto médio (ou método de Euler modificado) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por

$$y(x) = e^x - 1 - x,$$

compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

[10.4] Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000, \end{cases}$$

com solução exacta

$$y(x) = 1000\, e^{0.04x},$$

estime $y(1)$ pelo método de Taylor de ordem 2 e pelo método do ponto médio com $h = 1, h = 0.5, h = 0.25$. Com que método e com que espaçamento obteve uma melhor aproximaçao?

[10.5] Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

conduz a

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Aplique este método para obter uma solução aproximada de $y(10)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a soluçao do problema anterior é

$$y(x) = e^{-20x}.$$

(b) Se n for muito grande, o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge-Kutta?

[10.6] Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, & 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2, \end{cases}$$

determine um valor aproximado para $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$.

[10.7] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -xy(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{P}$$

(a) Mostre que $y(x) = e^{-x^2/2}$ é a única solução de (P). Compare o valor exacto de $y(2)$ com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando $h = 1, h = 0.5$.

(b) Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em (a), e determine o número de iterações de forma a garantir um erro absoluto inferior a 10^{-6} (admitindo que o valor inicial é exacto). Considerando que y_0 é um valor arredondado, com um erro $|e_0| \le \varepsilon$, qual o valor de ε máximo de forma a poder garantir o mesmo erro?

[10.8]* Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), & a \le x \le b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

onde $f \in C([a,b])$ e y_0 é uma constante real. Escrevendo a equação na forma

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t)\,dt,$$

mostre que:

(i) o método de Euler modificado (ou método do ponto médio) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral;

(ii) o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios ao integral;

(iii) o método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem corresponde à aplicação da regra de Simpson ao integral.

[10.9]* Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0 é uma constante real.

(a) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Heun.

(b) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de 4ª ordem.

(c) Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem.

[10.10] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e lipschitziana na segunda variável. Considere o seguinte método numérico para a aproximação de (P):

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n, y_n) + g(h)], \qquad n = 0, \ldots, N, \tag{M}$$

onde $x_n = nh, n = 0, \dots, N,\ h = \frac{1}{N}$, e $g \in C^1[0, \infty]$ é tal que $g(0) = 0$.

(a) Mostre que o método (M) é consistente e convergente. O que é que pode dizer sobre a sua ordem de convergência?

(b) Sejam $f(x, y) = x \sin y,\ \ \alpha = 3,\ \ g(h) = h$ e $h = 0.2$. Obtenha uma aproximação de $y(1)$ pelo método (M). Determine um majorante para o erro cometido.

[10.11] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = a. \end{cases}$$

(a) Mostre que se $f(x, y) = g(y)$, com $|g(y)| \le c < 1$ e $|g'(y)| \le L$, para qualquer y, então a sucessão $x_{n+1} = y(x_n)$ converge, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, e o seu limite é a.

(b) Indique a expressão de y_1 para um espaçamento h obtida pelo método de Taylor de segunda ordem.

[10.12] Considere a equação diferencial

$$y'(x) = f(y(x)),$$

e suponha que $f'(x) \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que se $h = 1$, o método de Euler converge para um valor fixo quando $n \to \infty$. Qual?

(b) O que acontece quando os valores de h tendem para zero?

(c) Calcule uma aproximação de $y(1)$ considerando $h = 0.2$, para

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) - x, \qquad y(0) = 1.$$

[10.13] Suponha que um método tem uma expressão para o erro $|e_n| \approx Ch^p$, em que $h = (b - a)/n$, para n grande.

(a) Encontre uma expressão para obter o valor de p, relacionando $|e_{2n}|$ e $|e_n|$.

(b) Avalie o critério anterior aplicando-o experimentalmente aos métodos de Euler e ponto-médio, considerando o problema de valor inicial apresentado na alínea (c) do Exercício [10.12].

[10.14] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x, \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.2)$ e para $y'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$. Sabendo que

$$\max_{x\in[0,0.2]} |y''(x)| \leq 2, \qquad \max_{x\in[0,0.2]} |y^{(3)}(x)| \leq 2,$$

deduza um majorante para o erro cometido.

[**10.15**] Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Euler, usando $h = 0.5$.

(b) O mesmo que em (a) pelo método de Euler modificado.

[**10.16**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação às segunda e terceira variáveis, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e y_0, z_0 são constantes reais.

(a) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Euler.

(b) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(c) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(d) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + 2h)$ e $Y'(x_0 + 2h)$ usando um passo de comprimento h do método preditor-corrector constituído pelos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de $2^{\underline{a}}$ ordem, tomando para valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ os valores obtidos em qualquer das alíneas anteriores.

[**10.17**]* Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'''(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x)), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0, \quad y''(x_0) = w_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação às segunda, terceira e quarta variáveis, I é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e y_0, z_0, w_0 são constantes reais.

(a) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h), Y'(x_0 + h)$ e $Y''(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Euler.

(b) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0+h), Y'(x_0+h)$ e $Y''(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(c) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0+h), Y'(x_0+h)$ e $Y''(x_0+h)$ usando um passo de comprimento h do método de Runge-Kutta clássico de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(d) Obtenha valores aproximados para $Y(x_0+2h), Y'(x_0+2h)$ e $Y''(x_0+2h)$ usando um passo de comprimento h do método preditor-corrector constituído pelos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de $2^{\underline{a}}$ ordem, tomando para valores aproximados para $Y(x_0+h), Y'(x_0+h), Y''(x_0+h)$ os valores obtidos em qualquer das alíneas anteriores.

[**10.18**] Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{P}$$

onde f é uma função a especificar.

(a) Tomando $f(x, y(x)) = y(x)$, aplique o método de Euler com $h = 0.25$, para determinar a aproximação para $y(1)$, e compare com a solução exacta do problema.

(b) O mesmo que em (a), mas usando o método do ponto-médio.

(c) Tomando $f(x, y(x)) = y(x)^3$, aproxime $y(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

(d) Tomando $f(x, y(x)) = y'(x)y(x)^2 - x\, y'(x)^2$, aproxime $y(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

[**10.19**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y(x)}{x} - y(x)^2, & 1 \le x \le 2, \\ y(1) = -1, \end{cases} \tag{P}$$

e o par preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}) + f(x_n, y_n)\right], & j = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{M}$$

(a) Sabendo que $|y(x)| \le 1$, $\forall x \in [1, 2]$, diga para que valores de h a iteração $(\mathrm{M})_2$ é convergente.

(b) Aplique o método (M) com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.125$ para obter um valor aproximado de $y(2)$. Efectue apenas uma iteração pelo método corrector.

[**10.20**] **(a)** Deduza um método unipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1 da forma

$$Q(f) = Af(x_m) + Bf\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$$

para aproximar o integral,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s))ds,$$

e usando como preditor para $y\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$ o método de Euler explícito.

(b) Determine a ordem de consistência do método, e conclua acerca da ordem de convergência.

(c) Deduza um método multipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1

$$Q(f) = Af(x_{m-2}) + Bf(x_m),$$

para aproximar o mesmo integral da alínea (a).

[**10.21**] **(a)** Deduza um método multipasso implícito, usando uma regra de quadratura

$$Q(f) = Af(x_{m-1}) + Bf(x_{m+1})$$

de grau 1 para aproximar o integral

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s))ds,$$

e aproximando y_{m+1} pelo método de Euler modificado.

(b) Determine o valor aproximado para $y(1)$, considerando $y'(x) = y(x)/2$, usando este método e inicializando os valores com o método de Euler e com o método de Euler modificado. Comente os resultados face aos valores exactos.

[**10.22**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = \alpha, \end{cases}$$

e o seguinte método multipasso para a sua resolução numérica:

$$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} - 2hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n \geq 1 \tag{M}$$

com $x_0 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + h,\ n = 1, 2, \ldots$.

(a) Verifique que o método (M) é consistente e determine a sua ordem.

(b) Sejam $f(x, y) = -y^2$ e $\alpha = 1$. Obtenha um valor aproximado para $y(1.6)$ pelo método (M). Tome $h = 0.1$ e calcule y_1 pelo método de Taylor de ordem 2. Compare com a solução exacta.

(c) Analise a convergência do método (M).

[**10.23**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e o seguinte método implícito a dois passos:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}\left[(3+a)f_{n+1} - af_n + 3f_{n-1}\right], \qquad n \geq 1, \tag{M}$$

onde $f_n = f(x_n, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$.

(a) Supondo que $y \in C^3[0,1]$, mostre que o método (M) é consistente e que o erro de truncatura local T_{n+1} é de ordem $O(h^2)$. Determine a de modo a que $T_{n+1} = O(h^3)$.

(b) Mostre que o método (M) é convergente.

(c) Utilize o método (M), com $a = 1$ e $h = 0.1$, para aproximar o valor de $y(0.4)$. Obtenha o valor inicial y_1 pelo método de Euler modificado. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}.$$

[**10.24**] Determine todos os métodos multipasso convergentes de ordem 2 do tipo

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})\right], \qquad n \geq 1.$$

[**10.25**]* Determine todos os métodos multipasso lineares com 3 passos e ordem de consistência pelo menos 3 que sejam convergentes.

[**10.26**] Os métodos multipasso de Nyström são obtidos integrando a equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

em $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ e aproximando a função integranda $f(x,y)$ pelo seu polinómio interpolador de grau $p \geq 0$ em $p+1$ pontos equidistantes $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}$.

(a) Mostre que os métodos de Nyström têm a forma geral

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots + b_p f(x_{n-p}, y_{n-p})\right], \qquad n \geq p,$$

onde $h = x_{n+1} - x_n$ e

$$b_k = \int_{-1}^{1} \prod_{i=0, i\neq k}^{p} \frac{i+t}{i-k}\, dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, p.$$

(b) Obtenha os métodos de Nyström com $p = 0, p = 1$ e $p = 2$. Determine o erro de truncatura local em cada um dos casos.

(c) Mostre que todos os métodos de Nyström são convergentes.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS RECOMENDADOS

[1.5] (a) (b)

$$x = 0.314159265358979\ldots \times 10 \qquad y = 0.314150943396226\ldots \times 10$$

$$\tilde{x} = 0.314159 \times 10 \qquad \tilde{y} = 0.314151 \times 10$$

$$e_{\tilde{x}} = 0.265 \times 10^{-5} \qquad e_{\tilde{y}} = -0.566 \times 10^{-6}$$

$$\delta_{\tilde{x}} = 0.844 \times 10^{-6} \qquad \delta_{\tilde{y}} = -0.180 \times 10^{-6}$$

(c) (d) (e) Pondo $x \boxed{\circ} y = \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x) \circ \mathrm{fl}(y))$:

$\circ$	$x \circ y$	$x \boxed{\circ} y$	$e_{x \boxed{\circ} y}$	$\delta_{x \boxed{\circ} y}$	$a.s.$
$\times$	$0.986934295891887\ldots \times 10$	0.986934×10	0.296×10^{-5}	0.300×10^{-6}	6
$\div$	$0.100002649033188\ldots \times 10$	0.100003×10	-0.351×10^{-5}	-0.351×10^{-5}	6
$+$	$0.628310208755205\ldots \times 10$	0.628310×10	0.209×10^{-5}	0.332×10^{-6}	6
$-$	$0.832196275290875\ldots \times 10^{-4}$	0.800000×10^{-4}	0.322×10^{-5}	0.387×10^{-1}	1

(f) $x = 0.314159265358979\ldots \times 10$ $\qquad$ $y = 0.314150943396226\ldots \times 10$

$$\tilde{x} = 0.314159265 \times 10 \qquad \tilde{y} = 0.314150943 \times 10$$

$$e_{\tilde{x}} = 0.359 \times 10^{-8} \qquad e_{\tilde{y}} = 0.396 \times 10^{-8}$$

$$\delta_{\tilde{x}} = 0.114 \times 10^{-8} \qquad \delta_{\tilde{y}} = 0.126 \times 10^{-8}$$

$$x - y = 0.832196275290875\ldots \times 10^{-4}$$

$$x \boxed{-} y = 0.832200000 \times 10^{-4}$$

$$e_{x \boxed{-} y} = -0.373 \times 10^{-9}$$

$$\delta_{x \boxed{-} y} = -0.448 \times 10^{-5}$$

a.s.: 5

[1.12] (a) Alg. 1: $u_1 = x \times x, \qquad u_2 = y \times y, \qquad z = u_3 = u_1 - u_2$

Alg. 2: $u_1 = x + y, \qquad u_2 = x - y, \qquad z = u_3 = u_1 \times u_2$

Alg. 3: $u_1 = x + y, \qquad u_2 = u_1 \times x, \qquad u_3 = u_1 \times y, \qquad z = u_4 = u_2 - u_3$

Alg. 1: $\delta^L_{\tilde{z}} = \delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} + \delta^L_{\text{arr}}$

$$\delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \frac{2}{x^2 - y^2}\left(x^2\delta_{\tilde{x}} - y^2\delta_{\tilde{y}}\right),$$

$$\delta^L_{\text{arr}} = \frac{x^2}{x^2 - y^2}\,\delta_{\text{arr},1} - \frac{y^2}{x^2 - y^2}\,\delta_{\text{arr},2} + \delta_{\text{arr},3}$$

Alg. 2: $\delta^L_{\tilde{z}} = \delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} + \delta^L_{\text{arr}}$

$$\delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \frac{2}{x^2 - y^2}\left(x^2\delta_{\tilde{x}} - y^2\delta_{\tilde{y}}\right),$$

$$\delta^L_{\text{arr}} = \delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2} + \delta_{\text{arr},3}$$

Alg. 3: $\delta^L_{\tilde{z}} = \delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} + \delta^L_{\text{arr}}$

$$\delta^L_{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \frac{2}{x^2 - y^2}\left(x^2\delta_{\tilde{x}} - y^2\delta_{\tilde{y}}\right),$$

$$\delta^L_{\text{arr}} = \delta_{\text{arr},1} + \frac{x}{x - y}\,\delta_{\text{arr},2} - \frac{y}{x - y}\,\delta_{\text{arr},3} + \delta_{\text{arr},4}$$

(b) Pondo $\delta_{\tilde{x}} = \delta_{\tilde{y}} = 0$, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ e sendo u a unidade de arredondamento do sistema de ponto flutuante onde se fazem os cálculos obtém-se:

Alg. 1: $\left|\delta^L_{\tilde{z}}\right| \le K_1(\theta)u \qquad$ Alg. 2: $\left|\delta^L_{\tilde{z}}\right| \le 3u \qquad$ Alg. 3: $\left|\delta^L_{\tilde{z}}\right| \le K_3(\theta)u$

$$K_1(\theta) = \frac{x^2 + y^2}{|x^2 - y^2|} + 1 = \frac{1}{|\cos 2\theta|} + 1$$

$$K_3(\theta) = \frac{|x| + |y|}{|x - y|} + 2 = \frac{|\cos\theta| + |\sin\theta|}{|\cos\theta - \sin\theta|} + 2$$

$$\min\{K_1(\theta), 3, K_3(\theta)\} =$$

$$\begin{cases} K_1(\theta), & |\theta| \le \dfrac{\pi}{6} \;\vee\; \dfrac{2\pi}{6} \le |\theta| \le \dfrac{4\pi}{6} \;\vee\; \dfrac{5\pi}{6} \le |\theta| \le \pi \\[2ex] 3, & \dfrac{\pi}{6} \le |\theta| \le \dfrac{2\pi}{6} \;\vee\; \dfrac{4\pi}{6} \le |\theta| \le \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

[1.15] (a) $S = 0.641371258 \times 10^{-3}$

(b) $\tilde{S}_1 = 0.64137126 \times 10^{-3}$; $\qquad \tilde{S}_2 = 0.64100000 \times 10^{-3}$

(c) $\delta_{\tilde{S}_1} = -0.312 \times 10^{-8}$; $\qquad \delta_{\tilde{S}_2} = 0.579 \times 10^{-3}$

(d) Alg. 1: $u = a + b, \qquad S_1 = u + c$

$$\delta^L_{\tilde{S}_1} = \delta^L_S + \frac{a+b}{S}\,\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}, \qquad \delta^L_S = \frac{1}{S}\left(a\delta_{\tilde{a}} + b\delta_{\tilde{b}} + c\delta_{\tilde{c}}\right)$$

Alg. 2: $u = b + c, \qquad S_2 = u + a$

$$\delta^L_{\tilde{S}_2} = \delta^L_S + \frac{b+c}{S}\,\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}, \qquad \delta^L_S = \frac{1}{S}\left(a\delta_{\tilde{a}} + b\delta_{\tilde{b}} + c\delta_{\tilde{c}}\right)$$

Alg. 3: $u = c + a, \qquad S_3 = u + b$

$$\delta^L_{\tilde{S}_3} = \delta^L_S + \frac{a+c}{S}\,\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}, \qquad \delta^L_S = \frac{1}{S}\left(a\delta_{\tilde{a}} + b\delta_{\tilde{b}} + c\delta_{\tilde{c}}\right)$$

Devem somar-se primeiro os dois números cuja soma tenha o menor valor. Para os valores de a, b, c da alínea (a) devem pois somar-se primeiro os números a e b.

[1.16] (a) $f(4.71) = -0.14263899 \times 10^2$

(b) $\tilde{f}_1(4.71) = -0.134 \times 10^2$, $\qquad \tilde{f}_2(4.71) = -0.143 \times 10^2$

(c) $\delta_{\tilde{f}_1(4.71)} = 0.606 \times 10^{-1}$, $\qquad \delta_{\tilde{f}_2(4.71)} = -0.253 \times 10^{-2}$

(d) Algoritmo de Horner (2)

$$u_1 = x + a, \quad u_2 = u_1 \times x, \quad u_3 = u_2 + b, \quad u_4 = u_3 \times x, \quad z = u_5 = u_4 + c$$

$$\delta^L_{\tilde{z}} = \frac{1}{f(x)}\Big[x(3x^2 + 2ax + b)\delta_{\tilde{x}} + ax^2\delta_{\tilde{a}} + bx\delta_{\tilde{b}} + c\delta_{\tilde{c}}$$
$$+x^2(x+a)(\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2}) + x(x^2 + ax + b)(\delta_{\text{arr},3} + \delta_{\text{arr},4})\Big] + \delta_{\text{arr},5}$$

[1.17] (a) $x_1 = -69.1055293779093\ldots,\qquad x_2 = -0.014470622090621\ldots$

(b) Alg. 1: $\tilde{x}_1 = -69.10,\qquad \tilde{x}_2 = -0.2000\times 10^{-1}$

Alg. 2: $\tilde{x}_1 = -69.10,\qquad \tilde{x}_2 = -0.1447\times 10^{-1}$

(c) Alg. 1: $\delta_{\tilde{x}_1} = 0.800\times 10^{-4},\qquad \delta_{\tilde{x}_2} = -0.382$

Alg. 2: $\delta_{\tilde{x}_1} = 0.800\times 10^{-4},\qquad \delta_{\tilde{x}_2} = 0.430\times 10^{-4}$

(d) Alg. 1: $u_1 = b\times b,\qquad u_2 = u_1 - c,\qquad u_3 = \sqrt{u_2}$

$x_1 = u_4 = -b - u_3,\qquad x_2 = u_5 = -b + u_3$

Alg. 2: $u_1 = b\times b,\qquad u_2 = u_1 - c,\qquad u_3 = \sqrt{u_2}$

$x_1 = u_4 = -b - u_3,\qquad x_2 = u_5 = c\div x_1$

Alg. 1: $\delta^L_{\tilde{x}_1} = \dfrac{b}{\Delta}\,\delta_{\tilde{b}} + \dfrac{c}{2x_1\Delta}\,\delta_{\tilde{c}} - \dfrac{b^2}{2x_1\Delta}\,\delta_{\text{arr},1} - \dfrac{\Delta}{2x_1}\,\delta_{\text{arr},2} - \dfrac{\Delta}{x_1}\,\delta_{\text{arr},3} + \delta_{\text{arr},4}$

$$\delta^L_{\tilde{x}_2} = -\frac{b}{\Delta}\,\delta_{\tilde{b}} - \frac{c}{2x_2\Delta}\,\delta_{\tilde{c}} + \frac{b^2}{2x_2\Delta}\,\delta_{\text{arr},1} + \frac{\Delta}{2x_2}\,\delta_{\text{arr},2} + \frac{\Delta}{x_2}\,\delta_{\text{arr},3} + \delta_{\text{arr},5}$$

Alg. 2: $\delta^L_{\tilde{x}_1} = \dfrac{b}{\Delta}\,\delta_{\tilde{b}} + \dfrac{c}{2x_1\Delta}\,\delta_{\tilde{c}} - \dfrac{b^2}{2x_1\Delta}\,\delta_{\text{arr},1} - \dfrac{\Delta}{2x_1}\,\delta_{\text{arr},2} - \dfrac{\Delta}{x_1}\,\delta_{\text{arr},3} + \delta_{\text{arr},4}$

$$\delta^L_{\tilde{x}_2} = -\frac{b}{\Delta}\,\delta_{\tilde{b}} - \frac{c}{2x_2\Delta}\,\delta_{\tilde{c}} + \frac{b^2}{2x_1\Delta}\,\delta_{\text{arr},1} + \frac{\Delta}{2x_1}\,\delta_{\text{arr},2} + \frac{\Delta}{x_1}\,\delta_{\text{arr},3} - \delta_{\text{arr},4} + \delta_{\text{arr},6}$$

onde $\Delta = \sqrt{b^2 - c}$

$b^2 \gg c:\quad \Delta \approx b,\qquad x_1 \approx -2b,\qquad x_2 \approx -\dfrac{c}{2b}$

Alg. 1: $\delta^L_{\tilde{x}_1} \approx \delta_{\tilde{b}} - \dfrac{c}{4b^2}\,\delta_{\tilde{c}} + \dfrac{1}{4}\left(\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2} + 2\delta_{\text{arr},3}\right) + \delta_{\text{arr},4}$

$$\delta^L_{\tilde{x}_2} \approx -\delta_{\tilde{b}} + \delta_{\tilde{c}} - \frac{b^2}{c}\left(\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2} + 2\delta_{\text{arr},3}\right) + \delta_{\text{arr},5}$$

Alg. 2: $\delta^L_{\tilde{x}_1} \approx \delta_{\tilde{b}} - \dfrac{c}{4b^2}\,\delta_{\tilde{c}} + \dfrac{1}{4}\left(\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2} + 2\delta_{\text{arr},3}\right) + \delta_{\text{arr},4}$

$$\delta^L_{\tilde{x}_2} \approx \delta_{\tilde{b}} + \delta_{\tilde{c}} - \frac{1}{4}\left(\delta_{\text{arr},1} + \delta_{\text{arr},2} + 2\delta_{\text{arr},3}\right) - \delta_{\text{arr},4} + \delta_{\text{arr},6}$$

[1.20] **(b)** Sem p.p.p.: $\tilde{x} = -10.00, \qquad \tilde{y} = 1.001$

Com p.p.p.: $\tilde{x} = 10.00, \qquad \tilde{y} = 1.000$

(c) Sem p.p.p.: $\delta_{\tilde{x}} = 2.00 \qquad \delta_{\tilde{y}} = -0.001$

Com p.p.p.: $\delta_{\tilde{x}} = 0.00, \qquad \delta_{\tilde{y}} = 0.00$

(d) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) b_1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo:
$$\begin{array}{lll} u_1 = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}, & u_2 = u_1 \times a_{12}, & u_3 = u_1 \times b_1, \\ u_4 = a_{22} - u_2, & u_5 = b_2 - u_3, & y = u_6 = u_5 \div u_4, \\ u_7 = a_{12} \times y, & u_8 = b_1 - u_7, & x = u_9 = u_8 \div a_{11} \end{array}$$

$$\delta^L_{\tilde{y}} = \frac{u_2}{u_4}\left(\delta_{\mathrm{arr},1} + \delta_{\mathrm{arr},2}\right) - \frac{u_3}{u_5}\left(\delta_{\mathrm{arr},1} + \delta_{\mathrm{arr},3}\right) - \delta_{\mathrm{arr},4} + \delta_{\mathrm{arr},5} + \delta_{\mathrm{arr},6}$$
$$\delta^L_{\tilde{x}} = -\frac{u_7}{u_8}\left(\delta^L_{\tilde{y}} + \delta_{\mathrm{arr},7}\right) + \delta_{\mathrm{arr},8} + \delta_{\mathrm{arr},9}$$

[2.5] **(a)** convergência logarítmica ou infralinear, $K^{[1]}_\infty = 0$;

(b) convergência linear, $K^{[1]}_\infty = 1$;

(c) convergência (supralinear) de ordem b, $K^{[b]}_\infty = 1$;

(d) convergência exponencial, $K^{[r]}_\infty = 0, \ \forall r \geq 1$;

(e) convergência linear, $\dfrac{1}{12} \leq K^{[1]}_n \leq \dfrac{3}{4}$.

[2.7] $x_m = -2 \times 4^m + (3 + 2m) \times 2^m$

[3.3] **(b)** $z = -3.1831 \pm 0.5 \times 10^{-4}$

(c) $n \geq 19$

[3.5] **(c)** $z = 0.71481 \pm 0.5 \times 10^{-5}$

[3.6] **(b)** $z = 4.30658 \pm 0.5 \times 10^{-5}$

[3.8] **(b)**

Método	Pontos fixos		O.c.	$K_\infty^{[r]}$
	Todos	Método converge	r	
1	$\frac{6}{5},\ 2$	$-$	$-$	$-$
2	$-4,\ 3$	3	1	$\frac{3}{4}$
3	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{3}$	2	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
4	$-\sqrt{a},\ 0,\ \sqrt{a}$	$-\sqrt{a},\ \sqrt{a}$	3	$\frac{1}{4a}$

[3.24] **(c)** $z_1 = 1.139194147 \pm 0.5 \times 10^{-9}$

[3.25] **(b)** $z_2 = 2.745898312 \pm 0.5 \times 10^{-9}$

[3.26] **(b)** $\alpha = 0.851241066782 \pm 0.5 \times 10^{-12}$

[3.27] **(b)** $q = \dfrac{1-p}{2}$

(d) $\sqrt[3]{231} = 6.135792439661959 \pm 0.5 \times 10^{-15}$

[3.35] **(b)** $z_3 = 5.114907541477 \pm 0.5 \times 10^{-12}$

[3.36] **(b)** $z = 1.126561908150 \pm 0.5 \times 10^{-12}$

[4.14]

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 62 & -36 & -19 \\ -36 & 21 & -11 \\ -19 & 11 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\sigma(A) = \{0.0112673, \; 5.32658, \; 16.6622\}$

(c) $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A) = 2340, \qquad \text{cond}_2(A) = 1478.81$

[4.15] (b) $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A) = (2\alpha+1)^2, \qquad \text{cond}_2(A) = (\alpha+\beta)^2$

(c) $x = u_1, \qquad \tilde{x} = \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) u_1$

(d) $x = u_1, \qquad \tilde{x} = u_1 + \dfrac{\varepsilon}{\lambda_2}\, u_2$

[4.16]

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta' & \alpha' & \cdots & \cdots & \alpha' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha' = -\dfrac{\alpha}{\beta}, \qquad \beta' = \dfrac{1}{\beta}$

(b) $\text{cond}_1(A) = \max\{|\beta|, |\alpha|+1\} \times \max\left\{\dfrac{1}{|\beta|}, 1 + \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\right\}$

$\text{cond}_\infty(A) = \max\{|\beta| + (n-1)|\alpha|, 1\} \times \max\left\{\dfrac{1+(n-1)|\alpha|}{|\beta|}, 1\right\}$

$\text{cond}_*(A) = \max\left\{|\beta|, \dfrac{1}{|\beta|}\right\}$

(c) $\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty < \dfrac{2\mu^2}{1-\mu^2}$

[4.24]

Método	Matriz triangular superior	Matrix triangular inferior
Jacobi	n iteradas	n iteradas
Gauss-Seidel	n iteradas	1 iterada

[4.29]

(a) $A' = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b' = \begin{bmatrix} 31 \\ 22 \\ -21 \end{bmatrix}.$

(b) $x \approx x^{(5)} = \dfrac{1}{10^5}\,[200725 \;\; 100726 \;\; 200119]^T$

$\|x - x^{(5)}\|_\infty \leq \dfrac{4347}{2 \times 10^5} = 0.0217$

(c) $x \approx x^{(3)} = \dfrac{1}{8 \times 10^6}\,[16018100 \;\; 8050490 \;\; 15986663]^T$

$\|x - x^{(3)}\|_\infty \leq \dfrac{87453}{16 \times 10^5} = 0.0547$

[4.36] **(a)** $\alpha \in \left]-1, \dfrac{5}{2}\right[,$ **(b)** $\alpha \in \left]-\dfrac{5}{2}, 1\right[$

(c) $\alpha \in \left]-1, \dfrac{5}{2}\right[,$ **(d)** $\alpha \in]-1, 1[$

[4.40]

$$r_\sigma(\omega) = \begin{cases} \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 1 - \omega}\right)^2, & \omega \notin [\omega_-, \omega_+], \\ \omega - 1, & \omega \in [\omega_-, \omega_+] \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\omega}{2}, \qquad \omega_\pm = \frac{2}{\alpha^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}\right)$$

O método converge para $\omega \in]0, 2[$.

[4.43] $\omega \in]0, 2\omega_{\text{opt}}[, \qquad \omega_{\text{opt}} = \dfrac{a}{a^2 + b^2}, \qquad r_\sigma(\omega_{\text{opt}}) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

[5.1] **(a)** $z = g(z), \qquad z \in D = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad g(x) = \begin{bmatrix} x_2/\sqrt{5} \\ \frac{1}{4}(\sin x_1 + \cos x_2) \end{bmatrix}$

$\tilde{z} = \tilde{g}(\tilde{z}), \qquad \tilde{z} \in \tilde{D} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad \tilde{g}(x) = \begin{bmatrix} -x_2/\sqrt{5} \\ \frac{1}{4}(\sin x_1 + \cos x_2) \end{bmatrix}$

$g(g(\mathbb{R}^2)) \subset D, \qquad \tilde{g}(\tilde{g}(\mathbb{R}^2)) \subset \tilde{D}$

(b) $z \approx x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.123016 \\ 0.270318 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{z} \approx x^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.100147 \\ 0.219418 \end{bmatrix}$

(c) $\|z - x^{(4)}\|_\infty \leq 0.476 \times 10^{-2}, \qquad \|\tilde{z} - x^{(4)}\|_\infty \leq 0.452 \times 10^{-2}$

[5.5] **(a)** $g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(x_2 + \varepsilon \cos x_3\right) \\ -\frac{1}{3}\left(x_1 + 3\varepsilon x_1 x_3\right) \\ -\frac{1}{3}\left(x_2 + \varepsilon x_1^2\right) \end{bmatrix}$ **(b)** $z \approx x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.125 \\ +0.0416667 \\ -0.00130208 \end{bmatrix}$

(c) 28 iteradas.

[5.9] **(a)** $z_1 = x^{(1)} = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \neq \dfrac{8}{3}$ **(b)** $z_2 \approx x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{43}{9} \\ -\dfrac{46}{9} \\ -\dfrac{29}{6} \end{bmatrix}$

(c) $z_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad z_2 = \begin{bmatrix} -1 - \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} - \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \\ -2 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad z_3 = \begin{bmatrix} -1 + \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} + \dfrac{8}{3}\sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

[5.12] **(a)** $z \approx x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.33636 \\ 1.75424 \end{bmatrix}$

(b) $\|z - x^{(2)}\|_\infty \leq 0.272 \times 10^{-5}$

(c) $\begin{bmatrix} -3.00162 \\ 0.148108 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -0.901266 \\ -2.08659 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1.33636 \\ 1.75424 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2.99837 \\ 0.148431 \end{bmatrix}$

[6.14] **(a)** $$p_3(x) = -\frac{1}{6}\,x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}\,x(x+1)(x+2) + \frac{8}{3}\,x(x^2-1) = x(2x^2+x-2)$$

(b) $$p_3(x) = 1-(x+1)+(x+1)x+2(x+1)x(x-1) = x(2x^2+x-2)$$

(d) $|e_3(x)| \le \dfrac{25}{24}, \quad \forall x \in [-1,2]$

(e) $p_4(x) = x^4$

(f) $f(x) = x^4 + k(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3), \qquad 0 < k \le \dfrac{1}{120}$

[6.20] **(a)** $$q_n(y) = f^{-1}[y_0] + \sum_{k=0}^{n} f^{-1}[y_0, y_1, \ldots, y_k] W_k(y), \qquad W_k(y) = \prod_{i=0}^{k-1}(y-y_i)$$

(b) $z \approx q_3(0) = 0.567143$

[7.1] **(a)** $p_1^*(x) = \dfrac{1}{5}\,(11 + 23x)$

(b) $p_2^*(x) = \dfrac{1}{5}\,(-9 + 3x + 20x^2)$

(c) $p_3^*(x) = -2x + x^2 + 2x^3$

(d) $d(f, p_1^*) = 2\sqrt{\dfrac{89}{5}} \approx 8.43801, \qquad d(f, p_2^*) = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \approx 2.68328, \qquad d(f, p_3^*) = 0$

[7.4] $\phi^*(x) = \dfrac{1}{2}\,(1 + \cos(\pi x))$

[7.10] $\phi^*(x) = \dfrac{1}{a^* x + b^*}, \qquad a^* = 0.429322, \qquad b^* = 0.612601$

[7.14] **(a)** $p_2^* = \dfrac{1}{35}\,(7P_0 + 21P_1 + 20\,P_2), \qquad p_2^*(x) = \dfrac{3}{35}\,(-1 + 7x + 10x^2)$

(b) $p_2^* = \dfrac{1}{8}\,(3T_0 + 6T_1 + 4T_2), \qquad p_2^*(x) = \dfrac{1}{8}\,(-1 + 6x + 8x^2)$

(c) $p_2^* = \dfrac{3}{4}\,(H_0 + H_1 + H_2), \qquad p_2^*(x) = \dfrac{3}{4}\,(-1 + 2x + 4x^2)$

(d) $p_2^* = 6\,(5L_0 - 19L_1 + 27L_2), \qquad p_2^*(x) = 3\,(26 - 70x + 27x^2)$

[8.1]

$f(x) = \exp(-x^2), \qquad I(f) = 0.746824132812$

M	$I^{(M)}$	$\dfrac{1}{6M^2}$	$\dfrac{1}{3}\left\vert I^{(M)} - I^{(M/2)}\right\vert$	$\left\vert E^{(M)}\right\vert$	$\dfrac{\left\vert E^{(M)}\right\vert}{\left\vert E^{(M/2)}\right\vert}$
1	0.683939720586	0.166667		0.628844×10^{-1}	
2	0.731370251829	0.416667×10^{-1}	0.158102×10^{-1}	0.154539×10^{-1}	0.245751
4	0.742984097800	0.104167×10^{-1}	0.387128×10^{-2}	0.384004×10^{-2}	0.248484
8	0.745865614846	0.260417×10^{-2}	0.960506×10^{-3}	0.958518×10^{-3}	0.249612
16	0.746584596788	0.651042×10^{-3}	0.239661×10^{-3}	0.239536×10^{-3}	0.249902
32	0.746764254652	0.162760×10^{-3}	0.598860×10^{-4}	0.598782×10^{-4}	0.249976
64	0.746809163638	0.406901×10^{-4}	0.149697×10^{-4}	0.149692×10^{-4}	0.249994
128	0.746820390542	0.101725×10^{-4}	0.374230×10^{-5}	0.374227×10^{-5}	0.249998
256	0.746823197246	0.254313×10^{-5}	0.935568×10^{-6}	0.935566×10^{-6}	0.250000

$f(x) = \sqrt{x}, \qquad I(f) = \dfrac{2}{3}$

M	$I^{(M)}$	$\dfrac{1}{6M^2}$	$\dfrac{1}{3}\left\vert I^{(M)} - I^{(M/2)}\right\vert$	$\left\vert E^{(M)}\right\vert$	$\dfrac{\left\vert E^{(M)}\right\vert}{\left\vert E^{(M/2)}\right\vert}$
1	0.500000000000			0.166667	
2	0.603553390593		0.345178×10^{-1}	0.631133×10^{-1}	0.378680
4	0.643283046243		0.132432×10^{-1}	0.233836×10^{-1}	0.370502
8	0.658130221624		0.494906×10^{-2}	0.853645×10^{-2}	0.365061
16	0.663581196877		0.181699×10^{-2}	0.308547×10^{-2}	0.361447
32	0.665558936279		0.659246×10^{-3}	0.110773×10^{-2}	0.359015
64	0.666270811379		0.237292×10^{-3}	0.395855×10^{-3}	0.357357
128	0.666525657297		0.849486×10^{-4}	0.141009×10^{-3}	0.356214
256	0.666616548977		0.302972×10^{-4}	0.501177×10^{-4}	0.355421

[8.8]

$f(x) = \exp(-x^2), \qquad I(f) = 0.746824132812$

n	I_n	$\vert I - I_n\vert$	$1 - \dfrac{I_n}{I}$
1	0.745119412436	0.170×10^{-2}	0.228×10^{-2}
2	0.746830391489	0.626×10^{-5}	0.838×10^{-5}
3	0.746838057512	0.139×10^{-4}	0.186×10^{-4}
6	0.746823756571	0.376×10^{-6}	0.504×10^{-6}

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad I(f) = 0.785398163397$

n	I_n	$\lvert I - I_n\rvert$	$\left\lvert 1 - \frac{I_n}{I} \right\rvert$
1	0.784240766618	0.116×10^{-2}	0.147×10^{-2}
2	0.785397945234	0.218×10^{-6}	0.278×10^{-7}
3	0.785395862445	0.230×10^{-5}	0.293×10^{-5}
6	0.785392713917	0.545×10^{-5}	0.694×10^{-5}

[8.14] **(a)** $A_0 = e - 2, \quad A_1 = 1$

(b) $E_1(f) = -\dfrac{3-e}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in [0,1]$

(c) $I_1(f) = 0.841471, \qquad |E_1(f)| \le 0.118$

(d) $I_1^{(4)}(f) = 0.923705, \qquad \left|E_1^{(4)}(f)\right| \le \dfrac{\sqrt{2}e^{\pi/4}}{192} = 0.0162$

(e) $M = 51$

[8.22] $I_0(f) = f(1)$

$$I_1(f) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$x_0 = 0.415774556783479 \qquad w_0 = 0.711093009929173$

$x_1 = 2.294280360279041 \qquad w_1 = 0.278517733569241$

$x_2 = 6.289945082937480 \qquad w_2 = 0.010389256501586$

[10.9] **(a)** $Y(x_0+h) \approx y_2$, onde

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\left[f(x_0,y_0) + f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0,y_0)\right)\right]$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{4}\left[f(x_1,y_1) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1,y_1)\right)\right], \qquad x_1 = x_0 + \frac{h}{2}$$

(b) $Y(x_0+h) \approx y_1$, onde

$$y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\,(d_f f)(x_0,y_0) + \frac{h^3}{6}\,(d_f^2 f)(x_0,y_0) + \frac{h^4}{24}\,(d_f^3 f)(x_0,y_0)$$

$$d_f f = f_x + f f_y$$

$$d_f^2 f = f_{xx} + f_x f_y + 2 f f_{xy} + f f_y^2 + f^2 f_{yy}$$

$$\begin{aligned} d_f^3 f \; &= f_{xxx} + f_{xx} f_y + 3 f_x f_{xy} + 3 f f_{xxy} + f_x f_y^2 + 3 f f_x f_{yy} \\ &+ 5 f f_y f_{xy} + 3 f^2 f_{xyy} + f f_y^3 + 4 f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy} \end{aligned}$$

(c) $Y(x_0+h) \approx y_1$, onde

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\,[\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4]$$

$$\varphi_1 = f(x_0,y_0), \qquad \varphi_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,\varphi_1\right)$$

$$\varphi_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,\varphi_2\right), \qquad \varphi_4 = f(x_0 + h, y_0 + h\varphi_3)$$

[10.17]

$$W(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \\ w(x) \end{bmatrix}$$

$$W'(x) = \begin{bmatrix} z(x) \\ w(x) \\ f(x, y(x), z(x), w(x)) \end{bmatrix} = F(x, W(x)), \quad W(x_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = W_0$$

(a) $Y(x_0+h) \approx y_2, \qquad Y'(x_0+h) \approx z_2, \qquad Y''(x_0+h) \approx w_2$

$$W_1 = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{h}{2}\, z_0 \\ z_0 + \frac{h}{2}\, w_0 \\ w_0 + \frac{h}{2}\, f(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{2}\, z_1 \\ z_1 + \frac{h}{2}\, w_1 \\ w_1 + \frac{h}{2}\, f(x_1, y_1, z_1, w_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = x_0 + \frac{h}{2}$$

(b) $Y(x_0 + h) \approx y_1, \qquad Y'(x_0 + h) \approx z_1, \qquad Y''(x_0 + h) \approx w_1$

$$W_1 = \begin{bmatrix} y_0 + hz_0 + \frac{h^2}{2}\, w_0 \\ z_0 + hw_0 + \frac{h^2}{2}\, f(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ w_0 + hf(x_0, y_0, z_0, w_0) + \frac{h^2}{2}\,(f_x + zf_y + wf_z + ff_w)(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

(c) $Y(x_0 + h) \approx y_1, \qquad Y'(x_0 + h) \approx z_1, \qquad Y''(x_0 + h) \approx w_1$

$$\tilde{x}_1 = x_0 + \frac{2h}{3}, \qquad \tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{2h}{3}\, z_0 \\ z_0 + \frac{2h}{3}\, w_0 \\ w_0 + \frac{2h}{3}\, f(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{w}_1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{h}{4}\,[z_0 + 3\tilde{z}_1] \\ z_0 + \frac{h}{4}\,[w_0 + 3\tilde{w}_1] \\ w_0 + \frac{h}{4}\,[f(x_0, y_0, z_0, w_0) + 3f(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1, \tilde{w}_1)] \end{bmatrix}$$

(d) $Y(x_0 + 2h) \approx y_2, \quad Y'(x_0 + 2h) \approx z_2, \quad Y''(x_0 + 2h) \approx w_2$

$$W_2^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{2}\,[3z_1 - z_0] \\ z_1 + \frac{h}{2}\,[3w_1 - w_0] \\ w_1 + \frac{h}{2}\,[3f(x_1, y_1, z_1, w_1) - f(x_0, y_0, z_0, w_0)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^{(0)} \\ z_2^{(0)} \\ w_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{2}\,\left[z_2^{(0)} + z_1\right] \\ z_1 + \frac{h}{2}\,\left[w_2^{(0)} + w_1\right] \\ w_1 + \frac{h}{2}\,\left[f(x_2, y_2^{(0)}, z_2^{(0)}, w_2^{(0)}) + f(x_1, y_1, z_1, w_1)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

[10.25] $y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + h[b_{-1} f_{n+1} + b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + b_2 f_{n-2}]$

(i) Condições para que o método tenha ordem de consistência ≥ 3:

$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$$\begin{cases} a_2 = 1 - a_0 - a_1 \\ b_0 = \dfrac{1}{12}\,(27 - 4a_0 + a_1 - 36b_{-1}) \\ b_1 = \dfrac{1}{3}\,(-4a_0 - 2a_1 + 9b_{-1}) \\ b_2 = \dfrac{1}{12}\,(9 - 4a_0 - 5a_1 - 12b_{-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 = 9 - a_1 - 24b_{-1}) \\ C_5 = \dfrac{1}{3}\,(-81 + 4a_0 + 17a_1 + 180b_{-1}) \end{cases}$$

(ii) Condição da raiz:

$$\rho(r) = r^3 - a_0r^2 - a_1r - a_2 = (r-1)[r^2 + (1-a_0)r + (1-a_0-a_1)]$$

Triângulo de convergência:

$$T = \big\{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 : a_1 > -a_0 \wedge a_1 \leq 1 \wedge a_1 < 3 - 2a_0\big\}$$

(iii) Condições para que o método tenha ordem de consistência ≥ 4:

$$C_4 = 0$$

$$\begin{cases} b_{-1} = \dfrac{9 - a_1}{24} \\ a_2 = 1 - a_0 - a_1 \\ b_0 = \dfrac{1}{24}\,(27 - 8a_0 + 5a_1) \\ b_1 = \dfrac{1}{24}\,(27 - 32a_0 - 19a_1) \\ b_2 = \dfrac{1}{24}\,(9 - 8a_0 - 9a_1) \end{cases}$$

$$C_5 = \frac{1}{6}\,(-27 + 8a_0 + 19a_1)$$

(iv) Condições para que o método tenha ordem de consistência ≥ 5:

$$C_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8a_0 + 19a_1 = 27$$

Não há nenhum método convergente de ordem ≥ 5 pois esta recta não intersecta o triângulo de convergência T.