Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2009/10

Cursos: LEGM, LET, MEC

Ficha de Trabalho 10: 10 - 14 de Maio

1. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Comece por determinar uma solução particular constante.

2. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0,1,1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{b}(t) = (0, e^{\sqrt{2}t}, e^{-t})$

3. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

VSFF

4. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x - y \\ \dot{z} = y - e^{-t} z \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) - 1 = z(0)$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z.

5. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações:

   (a) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$,

   (b) $y^{(2)} - 2y' - 3y = \cos t$,

   (c) $y^{(4)} + y = t + e^{2t} \cos t$,

   (d) $y^{(2)} - 2y' + y = te^t$.

6. Determine a solução do PVI

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 1 = b(t),$$

$y(0) = y'(0) = y^{(3)} = 0$, $y''(0) = 1$, quando

   (a) $b(t) = 0$;

   (b) $b(t) = t$;

   (c) $b(t) = e^t$.