Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2009/10

Cursos: LEGM, LET, MEC

Ficha de Trabalho 2: 8 a 12 de Março

1. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes números complexos na forma $x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$:

   (a) $e^{\pi i/4}$ (b) $5e^{-\pi i}$ (c) $2e^{3\pi i/2}$ (d) $e^{4\pi i/3}$

2. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   (a) $\cos(iz) = \cosh(z)$
   (b) $\sin(iz) = i\ \sinh z$
   (c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
   (d) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$
   (e) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
   (f) $\cosh^2 z\ + \sinh^2 z = \cosh(2z)$
   (g) $\sin(z + w) = \sin z \cdot \cos w\ + \cos z \cdot \sin w$
   (h) $\arctan z = \frac{i}{2}\ \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

3. Calcule o valor principal (i.e., considerando o ramo principal da função $\ln z$, ou seja, $\ln z = \ln|z| + i\theta$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$) de:

   (a) $\ln(1 + i)$ (b) $i^{\,i}$ (c) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$

4. Para uma função f, seja $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$. Determine $Z(f)$ para as funções:

   (a) $(z^4 - 1)\operatorname{sen} \pi z$
   (b) $\cosh^2 z$
   (c) $1 + e^{2z}$
   (d) $z^2 + \overline{z} + 1$
   (e) $\operatorname{sen}^3(1/z) \quad (z \neq 0)$
   (f) $1 - e^{z^2}$
   (g) $1 + e^{z^2}$
   (h) $-1 + i + \ln z$ (onde $\ln$ designa o valor principal do logaritmo).

VSFF

5. Esboce a imagem pela aplicação f do conjunto A indicado:

   (a) $f(z) = \frac{1}{z-i}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| = 2\}$,

   (b) $f(z) = \ln(z), \quad A = \{z \in \mathbb{C} \colon 2 < |z| < e, \quad \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{7\pi}{4}\}$, usando o ramo principal do argumento na definição do logaritmo,

   (c) $f(z) = e^{z+1+i}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re}(z)| < 2, |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$,

   (d) $f(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) = 0\}$.