Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2009/10

Cursos: LEGM, LET, MEC

Ficha de Trabalho 4: 22 a 26 de Março

1. Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ para:

   (a) $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [-\pi/2, \pi/2])$;

   (b) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ o arco da parábola $y = x^2$ que une a origem a $1 + i$;

   (c) $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{-it}$ $(t \in [0, 8\pi])$;

   (d) $f(z) = \sqrt{z}$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, onde o ramo de $\sqrt{z}$ é tal que $\sqrt{1} = 1$, e γ é percorrida de 1 para -1;

   (e) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $\gamma = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ percorrido no sentido horário, onde o ramo de $\sqrt{z}$ verifica $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

2. Mostre que:
$$\left| \oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1}\,dz \right| \leq 2\pi \frac{R(R+1)}{|R-1|}\ ,$$
   onde $R > 1$.

3. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a;r)$ a curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ percorrida uma vez no sentido positivo. Calcule $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$ para:

   (a) $\gamma = \gamma(1;1)$; (b) $\gamma = \gamma(-i;1)$; (c) $\gamma = \gamma(3i;\pi)$.

4. Calcule os integrais

   (a) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ percorrida no sentido negativo;

   (b) $\int_\gamma \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\,dz$, onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo;

   (c) $\int_\gamma \frac{z \operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2}\,dz$, onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 3\}$ percorrida no sentido positivo;

   (d) $\int_\gamma \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1}\,dz$, onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{2}\}$ percorrida no sentido negativo.

5. Seja $R > 0$. Mostre
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\,d\theta = 1 \quad (0 \leq r < R).$$
   Sugestão: Considere o integral da função $(R+z)/(z(R-z))$ sobre um caminho adequado.