Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2009/10

Cursos: LEGM, LET, MEC

Ficha de Trabalho 6: 12 - 16 de Abril

(Primeiro teste: 24 de Abril! Inscrição obrigatória (via Fénix))

1. Determine o desenvolvimento em série de Laurent de $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ em:

   (a) $|z| < 2$, (b) $2 < |z| < 3$, (c) $|z| > 3$.

2. Determine o desenvolvimento em série de Laurent de $(z^2-1)^{-2}$ em:

   (a) $0 < |z-1| < 2$, (b) $|z+1| > 2$.

3. Para cada uma das funções seguintes classifique a singularidade no ponto indicado ($z_0 \in \mathbb{C}$) e calcule o respectivo resíduo.

   (a) $\frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$, $(z_0 = 2)$,
   (b) $\frac{e^{iz}-1}{z^2}$, $(z_0 = 0)$,
   (c) $\frac{z^6}{z-\operatorname{sen} z}$, $(z_0 = 0)$,
   (d) $\frac{e^z-1-z}{(1-\cos(2z))\operatorname{sen} z}$, $(z_0 = 0)$.

4. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

   (a) $z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$,
   (b) $\frac{1}{1-\operatorname{sen} z}$,
   (c) $\frac{1}{e^{z^2}-1} - \frac{1}{z^2}$,
   (d) $\frac{e^{\pi z}}{z-i}$.

5. Calcule

   (a) $\displaystyle\oint_{|z|=8} (1+e^z)^{-2}\, dz$,
   (b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}\, dz$,
   (c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} iz}{z^2-4z+3}\, dz$,
   (d) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{1/(z+2)}}\, dz$.

VSSF

6. Utilize o Teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais reais:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta}\, d\theta\,.$

7. Mostre que

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{4}\,.$

8. Seja f uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ e note que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o *resíduo de f em* ∞ pela expressão

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(F(z), 0).$$

Mostre que se γ é uma curva fechada simples percorrida no sentido positivo e contendo $z_1, \dots, z_n$ no seu interior, então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$

Aproveite este resultado para calcular

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z^3 + 1}\, dz.$$