

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2009/10

Cursos: LEGM, LET, MEC

Ficha de Trabalho 8: 26 - 30 de Abril

1. Determine a solução do problema de Cauchy,

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \quad , \quad x(0) = 1 \quad ,$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

2. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 . \quad (1)$$

- a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.
b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y} \log x$$

- c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

3. Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y^2 \left(\frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 , \\ y(e) = -1 . \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

4. Calcule as primeiras iterações de Picard para o problema de Cauchy $y' = t^2 + y^2$, com $y(0) = 0$.
5. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t \sqrt[3]{y^2} , \\ y(0) = 0 , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

VSFF

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2, \\ y(1/2) = 2. \end{cases}$$

- (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.
- (b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
- (c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.