Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2010/11

Cursos: LEGM, MEC

Ficha de Trabalho 3: 7 a 11 de Março

1. Calcule os seguintes limites ou mostre que não existem:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2i}{7+3ni}$ (b) $\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n}$ (c) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ (d) $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

2. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa e indique os pontos de $\mathbb{C}$ onde são contínuas:

   (a) $|z|$ (b) $z|z|$ (c) $e^{\cos z}$ (d) $\ln(z+2)$

3. Determine o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções e calcule a sua derivada nesse domínio:

   (a) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ (b) $\overline{z}|z|$ (c) $x^2 + 2ixy$ (d) $x^3y + 3x^2 + iy^3$

4. Calcule as derivadas das seguintes funções:

   (a) $\operatorname{arcsen}(z)$ (b) $\ln\left(z^2 + \frac{1}{z-3}\right)$

5. Determine uma função harmónica conjugada para as seguintes funções:

   (a) $u(x,y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$ (b) $u(x,y) = -\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + 2y$

6. Diga se existe uma função holomorfa com parte imaginária $v(x,y) = -y^3 + 3x^2y + y$ e em caso afirmativo determine-a.

7. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Mostre que se $|f|$ é constante, então f é constante.