Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2010/11

Cursos: LEGM, MEC

Ficha de Trabalho 5: 21 a 25 de Março

1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\displaystyle\oint_\Gamma z^3 \cosh z \, dz$ (b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz$ (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}} \, dz$.

2. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

   Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-3)^2} \, dz,$$

   onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 6\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

3. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y) \ .$$

   (a) Mostre que u é uma função harmónica.
   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.
   (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} \, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3} \, dz$$

   onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

VSFF

4. Determine quais das seguintes séries convergem, indicando se convergem ou não absolutamente.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+\cos n)e^{-n+in^2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(i\pi/n)}{n^{\log n}}$.

5. Determine para que valores de $z \in \mathbb{C}$ as séries seguintes convergem absolutamente.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}(z^n+z^{-n})$.

6. Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n+\log^3 n}z^n$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(in)^n}$.

7. Determine a série de Maclaurin (a série de Taylor em $z_0=0$) indicando o domínio de validade.

   (a) e^{-z^2}; (b) $\sqrt{1-z^2}$; (c) $z\cos^2 z$.

8. Determine a série de Taylor na vizinhança de z_0 indicando o domínio de validade.

   (a) $z\operatorname{sen}(z+1)$, $z_0=-1$; (b) $\log(z^2+2z+2)$, $z_0=-1$.