

## Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2010/11

Cursos: LEGM, MEC

Ficha de Trabalho 6: 28 de Março - 1 de Abril

### Primeiro teste: 9 de Abril! Inscrição obrigatória (via Fénix)

1. Determine o desenvolvimento em série de Laurent de  $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$  em:

(a)  $|z| < 2$ ,                      (b)  $2 < |z| < 3$ ,                      (c)  $|z| > 3$ .

2. Determine o desenvolvimento em série de Laurent de  $(z^2 - 1)^{-2}$  em:

(a)  $0 < |z - 1| < 2$ ,                      (b)  $|z + 1| > 2$ .

3. Para cada uma das funções seguintes classifique a singularidade no ponto indicado ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ) e calcule o respectivo resíduo.

(a)  $\frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$ , ( $z_0 = 2$ ),                      (c)  $\frac{z^6}{z - \operatorname{sen} z}$ , ( $z_0 = 0$ ),  
(b)  $\frac{e^{iz} - 1}{z^2}$ , ( $z_0 = 0$ ),                      (d)  $\frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos(2z)) \operatorname{sen} z}$ , ( $z_0 = 0$ ).

4. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

(a)  $z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ ,                      (c)  $\frac{1}{e^{z^2} - 1} - \frac{1}{z^2}$ ,  
(b)  $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} z}$ ,                      (d)  $\frac{e^{\pi z}}{z - i}$ .

5. Calcule

(a)  $\oint_{|z|=8} (1 + e^z)^{-2} dz$ ,                      (c)  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} iz}{z^2 - 4z + 3} dz$ ,  
(b)  $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} dz$ ,                      (d)  $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}} dz$ .

**VSSF**

6. Utilize o Teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais reais:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx,$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

7. Mostre que

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$