Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2010/11

Cursos: LEGM, MEC

Ficha de Trabalho 7: 4 a 8 de Abril

Primeiro teste: 9 de Abril!
Inscrição obrigatória (via Fénix)

1. Seja $v(x,y) = \mathrm{e}^{10\,x}\, y\, \cos(10\,y) + x\,\mathrm{e}^{10\,x}\, \mathrm{sen}(10\,y) + \alpha(y)$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

   (a) Determine a forma geral de $\alpha(y)$ de modo a que $v(x,y)$ seja a parte imaginária duma função holomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   (b) Considerando $\alpha(y) = 0$, calcule a função g holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $\Im(g) = v$ e $g(1) = e^{10}$.

   (c) Calcule o valor de $\displaystyle\oint_{|z|=22211133344} \frac{g(z)}{z-1}\, dz$, onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{(z+1)^2}$.

   (a) Calcule os desenvolvimentos em série de Laurent de f válidos nas regiões
   $$\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 1\} \qquad \text{e} \qquad \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| > 1\}.$$

   (b) Calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$ onde $\gamma := \{2 + e^{i\theta} :\; \theta \in [\pi, 2\pi]\}$.

3. Considere a função
   $$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3} + (z+1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

   (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

   (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar
   $$\oint_{|z-1|=1{,}1} f(z)\, dz.$$

VSSF

4. Utilizando o teorema dos resíduos, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{5\pi}{2}.$$