Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais - 2º semestre de 2010/11

Cursos: LEGM, MEC

Ficha de Trabalho 9: 18 - 22 de Abril

1. Determine a solução do problema de Cauchy,

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1 \ ,$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

2. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \ . \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

3. Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x\dfrac{dy}{dx} \ = \ 0 \ , \\ \\ y(e) \ = \ -1 \ . \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

4. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \ , \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

VSFF

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \ , \\ y(1/2) = 2 \ . \end{cases}$$

(a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

(b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.