Análise Matemática III
2º semestre de 2001/2002

Exercício teste 10

Considere o sistema

$$\begin{cases} x^3y - y^2u + vu^2 = 1 \\ y^2v - 2u^3v^2 + v^3 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema anterior determina (u,v) como funções de classe C^1 de (x,y) numa vizinhança do ponto $(1,1,1,1)$.

(b) Calcule

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1,1).$$

Resolução:

(a) Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y,u,v) = (x^3y - y^2u + vu^2 - 1, y^2v - 2u^3v^2 + v^3).$$

O sistema do enunciado pode escrever-se $F(x,y,u,v) = (0,0)$. F é uma função de classe C^1 uma vez que as suas componentes são funções polinomiais, e $F(1,1,1,1) = (0,0)$ logo $(1,1,1,1)$ é uma solução do sistema. A matriz Jacobiana de F é dada por

$$DF(x,y,u,v) = \begin{bmatrix} 3x^2y & x^3 - 2yu & -y^2 + 2uv & u^2 \\ 0 & 2yv & -6u^2v^2 & y^2 - 4u^3v + 3v^2 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,1) &= \begin{vmatrix} -y^2 + 2uv & u^2 \\ -6u^2v^2 & y^2 - 4u^3v + 3v^2 \end{vmatrix}(1,1,1,1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0. \end{aligned}$$

O teorema da função implícita garante então que o sistema determina (u,v) como funções de classe C^1 de (x,y) numa vizinhança do ponto $(1,1,1,1)$.

(b) Escrevendo $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ para as funções definidas implicitamente pelo sistema, temos $F(x,y,u,v) = (0,0)$. As derivadas parciais das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ calculam-se derivando estas equações; obtem-se um sistema em que as incógnitas são as derivadas parciais.

Para calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ será necessário derivar o sistema primeiro em ordem a x e depois em ordem a y (ou vice-versa). No sistema que se obtem quando se deriva pela segunda vez aparecem todas as derivadas parciais de primeira ordem de u e v. Começamos assim por calcular estas derivadas. A maneira mais eficiente de o fazer é a seguinte:

Aplicando a regra de derivação da função composta às funções $F(x,y,u,v)$ e $G(x,y) = (x,y,u(x,y),v(x,y))$ obtem-se

$$DF(x,y,u,v)DG(x,y) = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 3x^2y & x^3-2yu & -y^2+2uv & u^2 \\ 0 & 2yv & -6u^2v^2 & y^2-4u^3v+3v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} 3x^2y & x^3-2yu \\ 0 & 2yv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y^2+2uv & u^2 \\ -6u^2v^2 & y^2-4u^3v+3v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = 0$$

Avaliando no ponto $(1,1,1,1)$ obtem-se

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Para calcular a segunda derivada parcial derivamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(F_1(x,y,u(x,y),v(x,y))\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(F_2(x,y,u(x,y),v(x,y))\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

em ordem a y e obtemos as equações

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial u} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial v} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

Já calculámos as primeiras derivadas parciais de u e v. Resta-nos portanto calcular as segundas derivadas parciais de F_1 e F_2 que aparecem nas equações acima:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} = 3x^2 & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial u} = -2y \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} = 2v & \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial u} = 2u & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial v} = 0 & \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} = 0 \\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial u} = 0 \\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} = -12uv^2 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial u} = -12u^2 v & \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial v} = 2y & \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} = -4u^3 + 6v
\end{array}$$

Substituindo os valores das derivadas no ponto $(1,1,1,1)$ no sistema acima obtemos finalmente

$$\begin{cases} 3 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3(\frac{2}{3}) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ -6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3(2 - 4 + \frac{4}{3}) = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{3}.$$